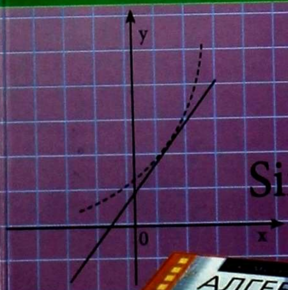
М. СУЛТАНБАЕВ

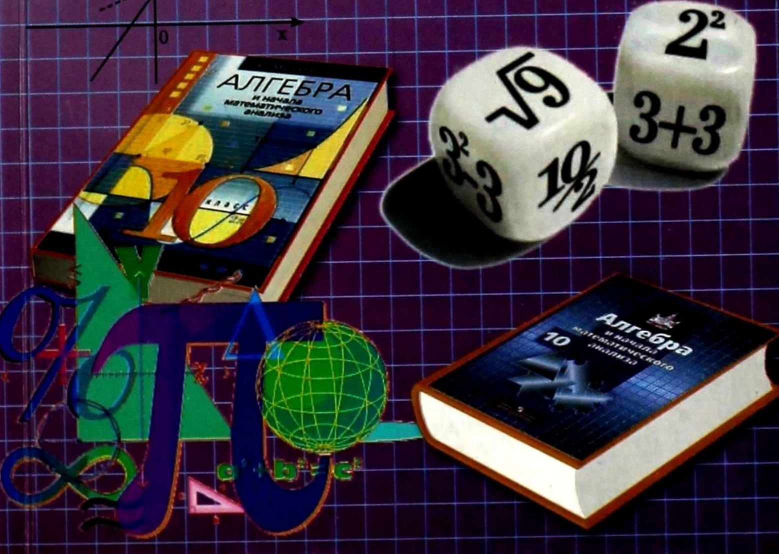
АЛГЕБРА

ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ БОЮНЧА МААЛЫМДАМА



МАСЕЛЕ-МИСАЛДАР ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ МЕНЕН

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$



УДК: 33
ББК: 22,1 Кырг.
С – 49.

Рецензенттер:

Е. Е. Син – педагогика илимдеринин доктору, профессор
А. Б. Байзаков – физико-математика илимдеринин доктору, профессор

КББАнын окумуштуулар кеңешинин 2017-жылдын 29-июнь № 5 жыйынынын токтомунда бекитилген

Султанбаев Маданбек
С – 49 Алгебра. Маалымдама. 10-класс, – Б.: 2017. – 195 б.

ISBN 978-9967-27-114-0

Бул китеп мектеп окуучуларына, студенттерге жана жаш математика мугалимдерине "Алгебра жана анализдин башталышын" өз алдынча окуп үйрөнүүчүлөргө колдонмо катары арналат.

Китепте математикалык анализдин башталышы боюнча алгачкы түшүнүктөр, аныктамалар жана формула-эрежелер берилип, маселе-мисалдарды чыгаруунун ар түрдүү усулдары көрсөтүлдү.

ISBN 978-9967-27-114-0

Кириш сөз

Кымбаттуу окуучулар!

Бул «Алгебра жана анализдин башталышы» маалымдама китеби, жалпы билим берүүчү орто мектептердин математика курсунун программалык материалдарына ылайыкташтырылып 10-класстар үчүн түзүлдү.

Колуңардагы маалымдама китепте тригонометриялык формулалар, алардын жардамы менен тригонометриялык теңдемелерди, барабарсыздыктарды чыгаруунун ар түрдүү ык-усулдары жөнөкөй жана татаал мисалдардын чыгарылыштарында көрсөтүлдү.

Маалымдама китепте математикалык анализдин башталышындагы предел, туунду жана анын колдонулуштарына байланышкан ийри сызыктын узундугун табуу, ийри сызык менен чектелген фигуралардын аянтарын табуу, ийри беттер менен чектелген фигуралардын көлөмдөрүн табуу, ар кандай ийри сызыкка жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин түзүү, бир калыпта эмес кыймылдагы нерсенин ылдамдыгын, ылдамдануусун жана өтүлгөн жолдун узундугун эсептөө сыяктуу көп сандаган маселелер түшүндүрмө-чыгарылыштары менен берилди. Маалымдамада берилген ушул маалыматтарды туура пайдалансаңар, китеп менен өз алдыңарча иштөөнү үйрөнөсүңөр, ал эми китеп менен иштей билүү, терең билимге ээ болуунун башаты болуп эсептелет.

Силерге илим-билим жолунда ак жол, албан-албан ийгилик каалайм.

Автор.

Китеп боюнча ойлорду жана сын-пикирлерди «Кут-Билим сабак» гезитине бериңиздер.
Байланыш телефон: 0554 44 06 28.

I глава. Тригонометриялык функциялар.
Сан аргументтүү функциялар.
1.1. Радиандык чен. Тригонометриялык формулалар.

9-класстын алгебра курсунан, силер тригонометриялык функциялар жана тригонометриялык формулалар менен таанышкансыңар. Мына ошолор боюнча кыскача кайталоо жүргүзөбүз.

Градустук чендеги жана радиандык чендеги бурчтардын өз ара байланышы

$$180^0 = \pi \text{ радиан}$$

көз карандылыгы менен аныкталат.

Демек 1 радиан бурч $= \frac{180^0}{\pi}$ *болот.*

2 радиан бурч $= 2 \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{360^0}{\pi}$ *болот.*

n^0 *тагы бурч,* $n^0 = \frac{\pi n}{180}$ *радианга барабар.*

Мисалы, $90^0 = \frac{\pi \cdot 90}{180} = \frac{\pi}{2}$ *радиан*

$270^0 = \frac{\pi \cdot 270}{180} = \frac{3\pi}{2}$ *радиан*

Радиусу r *болгон айлана үчүн анын* α *радиандагы жаасынын узундугу* l *төмөндөгү формула менен табылат.*

$l = \alpha r$ *(1)*

α *радиандагы борбордук бурчка туура келген сектордун аянты* S

(2) $S = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}$ *формуласы менен эсептелинет.*

1-мисал. Төмөнкү бурчтардын чоңдугун радиандык чен менен туюнткула

а) $210^0,\ 60^0,\ 240^0$; *б)* $330^0, 72^0, 45^0$;

Чыгаруу: а) $210^0 = \frac{\pi \cdot 210}{180} = \frac{7\pi}{6}$; $60^0 = \frac{\pi \cdot 60}{180} = \frac{\pi}{3}$

$240^0 = \frac{\pi 240^0}{180^0} = \frac{4\pi}{3}$;

б) $330^0 = \frac{\pi \cdot 330}{180} = \frac{11\pi}{6}$; $72^0 = \frac{\pi \cdot 72}{180} = \frac{2\pi}{5}$ $45^0 = \frac{\pi 45}{180} = \frac{\pi}{4}$.

2-мисал. Төмөнкү бурчтардын чоңдугун градустук чен менен туюнткула.

$\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{2\pi}{5}$.

Чыгаруу: $\frac{\pi}{6} = \frac{180^0}{6} = 30^0$;

$\frac{3\pi}{4}=\frac{3\cdot180^0}{4}=\frac{540^0}{4}=135^0$; $-\frac{5\pi}{4}=-\frac{5\cdot180^0}{4}=-\frac{900^0}{4}=-225^0$;
$-\frac{2\pi}{5}=-\frac{2\cdot180^0}{5}=-\frac{360^0}{5}=-72^0$.

3-мисал. Радиусу r болгон айлананын α радиандагы жаасынын узундугун тапкыла.

а) $r=5$*см,* $\alpha=3$; *б)* $r=8\text{м}, \alpha=\frac{\pi}{4}$.

Чыгаруу: $l=\alpha r$ *формуласы боюнча эсептөө жүргүзөбүз.*

а) $l=3\cdot5=15$ см; *б)* $l=\frac{\pi}{4}\cdot8=2\pi\approx6{,}28\text{м}$.

4-мисал. Радиусу r болгон тегеректин, α радиандагы жаасына туура келген сектордун аянтын тапкыла.

а) $\alpha=3, r=4\text{дм}$; *б)* $\alpha=\frac{2\pi}{5}, r=5\text{м}$.

Чыгаруу: $S=\frac{\alpha\cdot r^2}{2}$ *формуласы боюнча эсептөө жүргүзөбүз.*

а) $S=\frac{3\cdot4^2}{2}=\frac{48}{2}=24\ \text{дм}^2$;

б) $S=\frac{\frac{2\pi}{5}\cdot5^2}{2}=\frac{\frac{2\pi}{5}\cdot25}{2}=\frac{2\pi\cdot5}{2}=5\pi\ \text{м}^2$

α тар бурчунун негизги тригонометриялык функцияларынын маанилеринин таблицасы

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$tg\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$ctg\,\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$

Тригонометриялык функциялардын чейректердеги белгилери.

чейректер / функциялар	I $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	II $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	III $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	IV $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$tg\,\alpha$	+	-	+	-
$ctg\,\alpha$	+	-	+	-

Терс аргументтүү тригонометриялык функциярдын маанилерин оң аргументтүү тригонометриялык функциялардын маанилери аркылуу туюнтуучу формулалар.

$$\sin(-\propto) = -\sin\propto; \qquad \cos(-\propto) = \cos\propto;$$
$$tg(-\propto) = -tg\propto; \qquad ctg(-\propto) = -ctg\propto.$$

5-мисал. Төмөнкү туюнтмалардын сан маанилерин тапкыла.

а) $\sin\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + tg^2\frac{\pi}{3}$;

б) $tg\frac{\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

Чыгаруу:

а) $\sin\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + tg^2\frac{\pi}{3} = 1 - \cos\frac{\pi}{3} + (\sqrt{3})^2 = 1 - \frac{1}{2} + 3 =$
$= 3\frac{1}{2}$

б) $tg\frac{\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

1.2. Тригонометриялык негизги формулалар. Негизги тригонометриялык теңдештиктер.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \ (1)$$
$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \ (2)$$
$$ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \ (3)$$
$$tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1; \ (4)$$
$$tg^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \ (5)$$
$$ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \ (6)$$

1-мисал. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

а) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + tg^2 a$; б) $\frac{1}{tg\,\alpha} + \frac{1}{ctg\,\alpha}$.

Чыгаруу: а) (1) жана (5) формуланы пайдаланабыз.

$$cos^2\alpha + sin^2\alpha + tg^2a = 1 + tg^2a = \frac{1}{cos^2\alpha};$$

б) (1), (2),(3) жана (4) теңдештиктерди пайдаланабыз.

$$\frac{1}{tg\,\alpha} + \frac{1}{ctg\,\alpha} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} + \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{cos^2\alpha + sin^2\alpha}{sin\alpha \cdot cos\alpha} = \frac{1}{sin\alpha \cdot cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}sin2\alpha} = \frac{2}{sin\alpha}.$$

2-мисал. Теңдештикти далилдегиле.

а) $1 - \frac{tga}{tga+ctga} = cos^2\alpha;$ *б)* $\frac{sina+tga}{1+cosa} = tg\alpha.$

Далилдөө: а) (1), (2) жана (3) теңдештиктерди пайдаланабыз.

$$1 - \frac{tg\alpha}{tg\alpha+ctg\alpha} = 1 - \frac{\frac{sina}{cosa}}{\frac{sina}{cosa}+\frac{cosa}{sina}} = 1 - \frac{\frac{sina}{cosa}}{\frac{sin^2a+cos^2a}{cosa\cdot sina}} = 1 - \frac{\frac{sina}{cosa}}{\frac{1}{cosa\cdot sina}} =$$

$$= 1 - sin^2\alpha = cos^2\alpha.$$

б) (2) теңдештикти пайдаланабыз.

$$\frac{sina+tga}{1+cosa} = \frac{sina+\frac{sina}{cosa}}{1+cosa} = \frac{\frac{sina\cdot cosa+sina}{cosa}}{1+cosa} = \frac{sina(cosa+1)}{cosa(1+cosa)} = \frac{sina}{cosa} = tg\alpha.$$

(1),(2) жана (3) формулаларды пайдалануу менен берилген тригонометриялык туюнтмаларды өзгөртүп түзүп теңдештиктерди далилдедик.

Келтирүүнүн формулалары.

x	$\frac{\pi}{2}+a$ 90^0+a	$\frac{\pi}{2}-a$ 90^0-a	$\pi+a$ 180^0+a	$\pi-a$ 180^0-a	$\frac{3\pi}{2}+a$ 270^0+a	$\frac{3\pi}{2}-a$ 270^0-a	$2\pi+a$ 360^0+a	$2\pi-a$ 360^0-a
$sinx$	$cosx$	$cosx$	$-sinx$	$sinx$	$-cosx$	$-cosx$	$sinx$	$-sinx$
$cosx$	$-sinx$	$sinx$	$-cosx$	$-cosx$	$sinx$	$-sinx$	$cosx$	$cosx$
tgx	$-ctgx$	$ctgx$	tgx	$-tgx$	$-ctgx$	$ctgx$	tgx	$-tgx$
$ctgx$	$-tgx$	tgx	$ctgx$	$-ctgx$	$-tgx$	tgx	$ctgx$	$-ctgx$

3-мисал. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

а) $sin(\frac{\pi}{2}+\alpha);$ *в)* $ctg(\alpha - \frac{3\pi}{2});$

б) $tg(2\pi - \alpha);$ *г)* $cos(\alpha - \pi).$

Чыгаруу: *Келтирүүнүн формулаларын пайдаланабыз.*

а) $sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = cos\alpha;$ *в)* $ctg\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -ctg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -tg\alpha$

б) $tg(2\pi - \alpha) = -tg\alpha;$ *г)* $cos(\alpha - \pi) = cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha.$

4-мисал. Туюнтмаларды теңдеш өзгөрткүлө.

а) $cos(2\pi+\alpha)\cdot ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha);$ *в)* $sin(\pi+\alpha)\cdot cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha);$

б) $tg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cdot sin(\frac{\pi}{2}+\alpha);$ *г)* $tg(2\pi+\alpha)\cdot ctg(\pi-\alpha).$

Чыгаруу: Келтирүүнүн формулаларын колдонобуз.

а) $cos(2\pi+\alpha)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cos\alpha\cdot tg\alpha=cos\alpha\cdot\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=sin\alpha;$

б) $tg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cdot sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=ctg\alpha\cdot cos\alpha=\frac{cos\alpha}{sin\alpha}\cdot cos\alpha=\frac{cos^2\alpha}{sin\alpha};$

в) $sin(\pi+\alpha)\cdot cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-sin\,\alpha\cdot(-sin\,\alpha)=sin^2\alpha;$

г) $tg(2\pi+\alpha)\cdot ctg(\pi-\alpha)=tg\,\alpha\cdot(-ctg\,\alpha)=-1$

5-мисал. Туюнтмалардын маанилерин тапкыла.

а) $sin240^\circ-cos\,150^0\cdot tg210^0;$ в) $\frac{cos\,330^0\cdot sin210^0}{tg\,405^0};$

б) $cos\,315^0\cdot sin\,225^0\cdot tg\,270^0;$ г) $\frac{ctg(-225^0)}{sin\,390^0\cdot cos\,420^0}.$

***Чыгаруу:** Келтирүүнүн формулаларын, тригонометриялык функциялардын маанилеринин таблицасын колдонобуз.*

а) $sin\,240^0-cos\,150^0\cdot tg210^0=sin(180^0+60^0)-cos(180^0+$
$+30^0)\cdot tg210^0=-sin60^0-cos30^0\cdot tg30^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{1+\sqrt{3}}{2};$

б) $cos\,315^5\cdot sin\,225^0\cdot tg270^0=cos(270^0+45^0)\cdot sin(180^0+45^0)\cdot$
$\cdot tg(180^0+90^0)=sin45^0\cdot(-sin45^0)\cdot ctg90^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 0=0;$

в) $\frac{cos\,330^0\cdot sin210^0}{tg405^0}=\frac{cos(360^0-30^0)\,sin(180^0+30^0)}{tg(360^0+45^0)}=\frac{cos30^0sin30^0}{tg45^0}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{4};$

г) $\frac{ctg(-225^0)}{sin390^0cos420^0}=\frac{-ctg(180^0+45^0)}{sin(360^0+30^0)cos(360^0+60^0)}=\frac{-ctg45^0}{sin30^0cos60^0}=\frac{-1}{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=\frac{-1}{\frac{1}{4}}=-4$

6-мисал. Теңдештикти далилдегиле.

а) $cos(50^0+\alpha)=sin(40^0-\alpha)$

б) $cos(\alpha+155^0)+sin(115^0-\alpha)=0;$

в) $ctg\,x\cdot ctg(90^0-x)=1$

г) $tg\,1^0\cdot tg\,2^0\cdot tg3^0\cdot tg87^0\cdot tg88^0\cdot tg89^0=1.$

***Чыгаруу:** а) Келтирүүнүн фодмуласын пайдаланабыз.*

$50^0+\alpha=90^0-40^0+\alpha$ *деп өзгөртүү киргизебиз.*

$$cos(50^0+\alpha)=cos(90^0-40^0+\alpha)=cos(90^0-(40^0-\alpha))=$$
$$=sin(40^0-\alpha);$$

б) $cos(\alpha+155^0)+sin(115^0-\alpha)=0.$ *Биринчи кошулуучуну келтирүүнүн формуласы боюнча өзгөртүп түзөбүз.*

$cos(270^0-115^0+\propto)=cos(270^0-(115^0-\propto)=-sin(115^0-\propto)$

Демек, $cos(\alpha+155^0)+sin(115^0-\alpha)=-sin(115^0-\propto)+$
$+sin(115^0-\alpha)=0.$ *Теңдештик далилденди.*

в) $ctgx \cdot ctg(90-x) = 1,$ *келтируүнүн формуласы боюнча* $ctg(90-x) = tgx.$

Демек $ctgx \cdot tgx = 1$ *(4-формуланын негизинде).*

Теңдештик далилденди.

г) $tg1^0 \cdot tg2^0 \cdot tg3^0 \cdots tg87^0 \cdot tg88^0 \cdot tg89^0 = 1.$

Бул көбөйтүндүнү эсептөөдө келтируүнүн формуласын пайдаланып, $tg1^0$ *тан* $tg44^0$ *ка чейинки көбөйтүндүнү төмөндөгүчө өзгөртүп түзөбүз.*

$$tg1^0 = tg(90^0 - 89^0),\ tg2^0 = tg(90^0 - 88^0), \ldots$$

Ошондо берилген көбөйтүндү төмөндөгүдөй туюнтмага айланат.

$$tg(90^0-89^0)\cdot tg(90^0-88^0)\cdots tg45^0\cdot tg46^0\cdots tg88^0\cdot tg89^0 =$$
$$= ctg89^0\cdot ctg88^0\cdot ctg87^0\cdots ctg46^0\cdot tg45^0\cdot tg46^0\cdots tg88^0\cdot tg89^0 =$$
$$= ctg89^0\cdot tg89^0\cdot ctg88^0\cdot tg88^0\cdots ctg46^0\cdot tg46^0\cdot ctg45^0\cdot tg45^0 =$$
$$= 1\cdot 1\cdots 1\cdot 1 = 1$$

Мында $ctg89^0 \cdot tg89^0 = 1$ *ж.у.с.* $tg45^0 = 1.$

Теңдештик далилденди.

Кошуунун формулалары:

$$cos(\propto -\beta) = cos\alpha\cdot cos\beta + sin\alpha\cdot sin\beta;$$
$$cos(\propto +\beta) = cos\alpha\cdot cos\beta - sin\alpha\cdot sin\beta;$$
$$sin(\propto -\beta) = sin\alpha\cdot cos\beta - cos\alpha\cdot sin\beta;$$
$$sin(\propto +\beta) = sin\alpha\cdot cos\beta + cos\alpha\cdot sin\beta;$$
$$tg(\propto +\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta};$$
$$tg(\propto -\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta};$$
$$ctg(\propto +\beta) = \frac{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha + tg\beta};$$
$$ctg(\propto -\beta) = \frac{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}.$$

7-мисал. Төмөнкү туюнтмалардын маанилерин тапкыла.

а) $sin70^0 \cdot cos20^0 + cos70^0 \cdot sin20^0;$

б) $cos42^0 \cdot cos33^0 - sin42^0 \cdot sin33^0 - cos75^0;$

в) $sin65^0 \cdot cos20^0 - cos65^0 \cdot sin20^0;$

г) $cos47^0 \cdot cos43^0 - sin47^0 \cdot sin43^0.$

Чыгаруу: *Кошуунун формулаларын пайдаланабыз.*

а) $sin70^0 \cdot cos20^0 + cos70^0 \cdot sin20^0 = sin(70^0 + 20^0) = sin90^0 = 1;$

б) $cos42^0 \cdot cos33^0 - sin42^0 \cdot sin33^0 - cos75^0 = cos(42^0 + 33^0) -$
$- cos75^0 = cos75^0 - cos75^0 = 0;$

в) $sin65^0 \cdot cos20^0 - cos65^0 \cdot sin20^0 = sin(65^0 - 20^0) =$
$$= sin45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

г) $cos47^0 \cdot cos43^0 - sin47^0 \cdot sin43^0 = cos(47^0 + 43^0) = cos90^0 = 0.$

8-мисал. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө.

а) $cos(\propto - \beta) - sin\alpha \cdot sin\beta;$

б) $\frac{(tg4x - tg3x)ctgx}{1 + tg4x \cdot tg3x}.$

Чыгаруу: *а)* $cos(\propto - \beta) - sin\alpha \cdot sin\beta = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta -$
$- sin\alpha \cdot sin\beta = cos\alpha \cdot cos\beta;$

б) $\frac{(tg4x - tg3x)ctgx}{1 + tg4x \cdot tg3x} = tg(4x - 3x)ctgx = tgx \cdot ctgx = 1.$

9-мисал. Теңдештикти далилдегиле.

а) $1 + tg \propto \cdot \frac{1}{sin\alpha \cdot cos\alpha} = 2 + tg^2\alpha;$

б) $\frac{cos(\propto - \beta) - sin\alpha \cdot sin\beta}{sin(\propto + \beta) - cos\alpha \cdot sin\beta} = ctg \propto.$

Чыгаруу:

а) $1 + tg \propto \cdot \frac{1}{sin\alpha \cdot cos\alpha} = 1 + \frac{sin\alpha \cdot 1}{cos\alpha \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha} = \frac{1}{cos^2 \propto} + 1 = 1 + tg^2\alpha + 1 = 2 + tg^2\alpha;$

б) $\frac{cos(\propto - \beta) - sin\alpha \cdot sin\beta}{sin(\propto + \beta) - cos\alpha \cdot sin\beta} = \frac{cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta - sin\alpha \cdot sin\beta}{sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta - cos\alpha \cdot sin\beta} = \frac{cos\alpha \cdot cos\beta}{sin\alpha \cdot cos\beta} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = ctg \propto.$

Теңдештиктер далилденди.

Синустардын (косинустардын) суммасынын жана айырмасынын формулалары.

$$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha + \beta}{2} cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$
$$sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha - \beta}{2} cos\frac{\alpha + \beta}{2};$$
$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha + \beta}{2} cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$
$$cos\alpha - cos\beta = -2cos\frac{\alpha - \beta}{2} cos\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Эки эселенген аргументтин формулалары.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$
$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}.$$

Жарым аргументтин формулалары.

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ *жана* $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ *формулаларынан төмөндөгү жарым аргументтин формулалары келип чыгат.*

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2};\ (7)$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}\ (8)$$

(7) барабардыгын (8) ге мүчөлөп бөлүп, төмөнкү формуланы алабыз.

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.\ (9)$$

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ *барабардыгынын оң жагынын алымын жана бөлүмүн* $2\cos\frac{\alpha}{2}$ *ге жана* $2\sin\frac{\alpha}{2}$ *ге көбөйтүп, төмөнкү формулаларды алабыз.*

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\ (10)$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.\ (11)$$

10-мисал. Төмөнкү барбардыктардын туура лыгын далилдегиле.

а) $\sin\frac{7\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12} = 2\cos\frac{\pi}{12};$ *б)* $\cos\frac{13\pi}{16} + \cos\frac{5\pi}{16} = \sqrt{2}\cos\frac{9\pi}{16}.$

Чыгаруу: *а)* $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ *формуласын пайдаланабыз.*

$$\sin\frac{7\pi}{16} + \sin\frac{5\pi}{12} = 2\sin\frac{\frac{7\pi}{16}+\frac{5\pi}{12}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{7\pi}{16}-\frac{5\pi}{12}}{2} = 2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{12} = 2\cos\frac{\pi}{12};$$

б) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ *формуласын пайдаланабыз.*

$$\cos\frac{13\pi}{16} + \cos\frac{5\pi}{16} = 2\cos\frac{\frac{13\pi}{16}+\frac{5\pi}{16}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{13\pi}{16}-\frac{5\pi}{16}}{2} = 2\cos\frac{9\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{4} =$$
$$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{9\pi}{16} = \sqrt{2}\cos\frac{9\pi}{16}.$$

11-мисал. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

а) $\frac{sin2\propto+1}{cos2\propto}$; б) $\frac{2sin^2\frac{\propto}{2}(1+cos\propto)}{(1-2sin^2\frac{\propto}{2})^2}$.

Чыгаруу: *а) Бул туюнтманы жөнөкөйлөтүүдө*
$sin2\propto= 2sin\alpha \cdot cos\beta$; $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$;
$cos2\propto=$ $cos^2\alpha - sin^2\alpha$ *формулаларын пайдаланабыз.*

$$\frac{sin2\propto+1}{cos2\propto} = \frac{sin^2\alpha+2sin\alpha\cdot cos\beta+cos^2\alpha}{cos^2\alpha-sin^2\alpha} = \frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2}{(cos\alpha+sin\alpha)(cos\alpha-sin\alpha)} = \frac{sin\alpha+cos\alpha}{cos\alpha-sin\alpha};$$

б) Бул туюнтманы жөнөкөйлөтүүдө
$sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2}$; $cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$; $tg\propto= \frac{sin\propto}{cos\propto}$
формулаларын пайдаланабыз

$$\frac{2sin^2\frac{\propto}{2}(1+cos\propto)}{(1-2sin^2\frac{\propto}{2})^2} = \frac{2\cdot\frac{1-cos\alpha}{2}\cdot(1+cos\propto)}{cos^2\alpha} = \frac{1-cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha.$$

12-мисал. Теңдештикти далилдегиле.
а) $\frac{1}{1-cos\alpha}\cdot tg\frac{\propto}{2}(cos2\propto -cos^2\alpha) = -sin\propto$;
б) $\frac{cos^6\alpha-sin^6\alpha}{cos2\propto} + \frac{1}{4}\cdot sin^2 2\alpha = 1.$
Далилдөө: а) Бул теңдештикти далилдөөдө
$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}$; $cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$ *формулаларын пайдаланабыз*

$$\frac{1}{1-cos\alpha}\cdot tg\frac{\propto}{2}(cos2\propto -cos^2\alpha) = \frac{1}{1-cos\alpha}\cdot\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}(2cos^2\alpha - 1 -$$
$$-cos^2\alpha = \frac{sin\alpha}{1-cos^2\alpha}\cdot(cos^2\alpha - 1) = -\frac{sin\alpha}{cos^2\alpha-1}\cdot(cos^2\alpha - 1) =$$
$$= -sin\propto;$$

б) Бул теңдештикти далилдөөдө
$sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
формулаларын колдонобуз. $cos^2\alpha - sin^2\alpha = cos2\propto$.

$$\frac{cos^6\alpha-sin^6\alpha}{cos2\propto} + \frac{1}{4}\cdot sin^2 2\alpha = \frac{(cos^2\alpha)^3-(sin^2\alpha)^3}{cos2\propto} + \frac{1}{4}\cdot sin^2 2\alpha =$$

$$= \frac{(cos^2\alpha - sin^2\alpha)(cos^4\alpha + cos^2\alpha sin^2\alpha + sin^4\alpha)}{cos2\propto} +$$

$$+\frac{1}{4}\cdot 4\cdot sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha = \frac{cos2\propto(cos^4\alpha + cos^2\alpha sin^2\alpha + sin^4\alpha)}{cos2\propto} +$$

$$+\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \cos^4\alpha + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha =$$

$$= \cos^4\alpha + 2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1.$$

1.1. -1.2. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

1. Төмөнкү бурчтардын чоңдугун радиандык чен менен туюнткула.

а) $225^0,\ 30^0,\ 390^0;$ *б)* $85^0,\ 405^0,\ 540^0.$

2. Төмөнкү бурчтардын чоңдугун градустук чен менен туюнткула.

а) $\frac{5\pi}{18};\ \frac{4\pi}{9};\ \frac{\pi}{5}.$ *б)* $\frac{7\pi}{6};\ \frac{5\pi}{12};\ \frac{9\pi}{10}.$

3. Бир эле сандын синусу жана косинусу тиешелүү түрдө төмөнкү сандарга барабар боло алышабы?

а) $\frac{\sqrt{31}}{7}$ *жана* $\frac{\sqrt{18}}{7}$; *б) -0,6 жана 0,8;*

в) $-\frac{2}{5}$ *жана* $-\frac{4}{5}$; *г)* $\frac{7}{9}$ *жана* $\frac{5}{9}$.

4. Эгерде $ctg\frac{\alpha}{2} = 3$ *болсо, анда* $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$ *жана* $ctg\alpha$ *ны табкыла.*

5. а) Эгерде $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ *жана* $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ *болсо, анда* $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}$ *жана* $ctg\frac{\alpha}{2}$ *ны табкыла.*

б) Эгерде $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ *жана* $180^0 < \alpha < 270^0$ *болсо, анда* $\sin\frac{\alpha}{2}$ *ны,* $\cos\frac{\alpha}{2}$ *ны табкыла.*

6. Эгерде $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ *болсо, анда* $\frac{5\sin\alpha}{7-5\cos\alpha}$ *ны табкыла.*

7. Туюнтмаларды көбөйтүндүгө өзгөртүп түзгүлө.

а) $\sin17^0 + \sin11^0;$ *б)* $\sin8x - \sin4x;$

в) $1 - 2\cos\alpha;$ *г)* $1 + \sin x + \cos x;$

д) $\sin\alpha + \cos2\alpha + \sin3\alpha + \cos4\alpha;$ *е)* $\sin x - \cos y;$

8. Эсептегиле:

а) $\cos^2\frac{\pi}{12} \cdot \sin^2\frac{\pi}{12};$ *б)* $2\sin22^030' \cdot \sin67^030'$

в) $\cos115^0 + \cos65^0;$ *г)* $\sin75^0 + \sin15^0.$

9. Теңдештикти далилдегиле.

а) $cos4\alpha + 4cos2\alpha + 3 = 8cos^4\alpha;$

б) $4(sin3\alpha cos^3\alpha + cos3\alpha sin^3\alpha) = 3sin4\alpha;$

в) $sin105^0 + sin15^0 = \frac{\sqrt{6}}{2};$

г) $1 + cos2\alpha = 2cos^2\alpha;$

д) $cos^2\alpha \cdot cos^2\beta(tg^2\alpha - tg^2\beta) = sin^2\alpha - sin^2\beta;$

е) $(sin3\alpha + sin5\alpha)^2 + (cos3\alpha + cos5\alpha)^2 = 4cos^2\alpha.$

10. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

а) $\frac{sin35^0 \cdot cos25^0 + sin55^0 \cdot sin25^0}{cos17^0 \cdot cos13^0 - cos73^0 \cdot cos77^0};$

б) $\frac{sin4\alpha - sin5\alpha + sin6\alpha}{cos4\alpha - cos5\alpha + cos6\alpha};$

в) $\frac{cos7\alpha - cos3\alpha}{sin7\alpha - sin3\alpha};$

г) $(sin^2t + 2sint \cdot cost - cos^2t)^2.$

11. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *болгондо төмөнкү барабардыктардын туралыгын далилдегиле.*

а) $\sqrt{\frac{1+sin\alpha}{1-sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-sin\alpha}{1+sin\alpha}} = 2tg\alpha$

б) $\frac{\sqrt{1-sin^2\alpha}}{sin\alpha} = \frac{cos\alpha}{\sqrt{1-cos^2\alpha}}$

в) $sin^2\alpha + cos^4 - 1 = -2sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha$

Тригонометриялык функциялардын арасында төмөнкүдөй катнаштар да орун алат.

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha};$$ *(секанс альфа деп окулат)*

$$cosec\alpha = \frac{1}{sin\alpha};$$ *(косеканс альфа деп окулат).*

Бизге белгилүү $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$ *ны* $1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$ *деп,* $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$ *ны* $1 + ctg^2\alpha = cosec^2\alpha$ *деп теңдештик катары пайдалансак болот.*

1-мисал. Эгерде $tg\alpha = \frac{3}{4}$ *жана* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *болсо,* α *бурчунун тригонометриялык функцияларынын маанилерин тапкыла.*

Чыгаруу: $1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$ *формуласын пайдаланып* $sec\alpha$ *ны табабыз*

$$sec\alpha = \sqrt{1 + tg^2\alpha} = \sqrt{1 + (\tfrac{3}{4})^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \pm\frac{5}{4};$$

$sec\alpha$ *I чейректе оң болгондуктан* $sec\alpha = \frac{5}{4}$

$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$ *теңдештигинен* $cos\alpha$ *ны табабыз.*

$cos\alpha = \frac{1}{sec\alpha} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5};$

$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5};$

$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3};\ cosec\alpha = \frac{1}{sin\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3};$

1.3. Сан функциясы.

X көптүгүнөн алынган ар бир x санына Y көптүгүнөн кандайдыр бир y санын туура келтирүүчү эреже, X көптүгүндө берилген сан аргументтүү функция деп аталат.

Ал $y = f(x)$ *деп белгиленет.*

$x -$ *функциясынын аргументи,*

$D(f) -\ f$ *функциясынын аныкталуу областы.*

$E(f) -$ *функциянын маанилеринин областы.*

Функция формула түрүндө, (аналитикалык түрдө), график жана таблица түрүндө берилет.

Булар жөнүндө силер (VII-IX) класстарда таанышкансыңар.

I-мисал. а) Эгерде $f(x) = 2x + |x|$ *болсо, анда* $f(3)$, $f(-6)$ *жана* $f(a+3)$ *тү тапкыла.*

б) $f(0) = 7$, $f(1) = 0$ *жана* $f(2) = -3$ *болсо,*

$f(x) = ax^2 + bx + c$ *квадраттык үч мүчөсүн тапкыла.*

Чыгаруу: а) Аргументтин маанилерин берилген формулага коюп эсептөө жүргүзөбүз.

$f(3) = 2 \cdot 3 + |3| = 6 + 3 = 9$

$f(-6) = 2 \cdot (-6) + |-6| = -12 + 6 = -6$

$f(a+3) = 2(a+3) + (a+3) = 2a + 6 + a + 3 = 3a + 9.$

б) $f(0) = 7$ *демек,* $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 7$

$f(1) = 0$ *демек,* $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$

$f(2) = -3$ *демек* $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -3$ *мындан төмөнкүдөй теңдемелер системасын түзүүгө болот.*

$$\begin{cases} c = 7 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a + b + 7 = 0 \\ 4a + 2b + 7 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = -7 \\ 4a + 2b = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -7 - b \\ 2a + b = -5 \end{cases}$$

$$2(-7 - b) + b = -5$$

$$-14 - 2b + b = -5$$

$$-b = -5 + 14$$
$$b = -9$$

демек, $a = -7 - (-9) = -7 + 9 = 2$

Биз издеген квадраттык үч мүчө $f(x) = 2x^2 - 9x + 7$ *болот.*

2-мисал. Функциялардын маанилерин көрсотүлгөн чекиттерде тапкыла.

а) $f(x) = \sqrt{3x + x^2}$, *1, 2, 4;*

б) $f(x) = cos2\alpha + 3$. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{8}$;

Чыгаруу: *Аргументтин маанилерин берилген формулага коюп, функциянын маанилерин табабыз.*

а) $f(1) = \sqrt{3 \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, $f(2) = \sqrt{3 \cdot 2 + 2^2} = \sqrt{10}$;

$f(4) = \sqrt{3 \cdot 4 + 4^2} = \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$;

б) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos2 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 = cos\pi + 3 = -1 + 3 = 2$;

$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = cos2 \cdot \frac{\pi}{12} + 3 = cos\frac{\pi}{6} + 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 = \frac{\sqrt{3}+6}{2}$;

$$f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = cos2 \cdot \frac{3\pi}{8} + 3 = cos\frac{3\pi}{4} + 3 = cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 3 =$$

$= -sin\frac{\pi}{4} + 3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 3 = \frac{6-\sqrt{2}}{2}$;

3-мисал. Функциялардын аныкталуу областын тапкыла.

а) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-6}$; *б)* $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Чыгаруу: *а)* $f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-6}$ *функциясынын аныкталуу областы* $\frac{x+3}{x^2-x-6}$ *бөлчөгүнүн бөлүмү нөлгө барабар болбогон x тин маанилери болот.*

$x^2 - x - 6 = 0$ *квадраттык теңдемесин чыгарабыз, анын тамырлары* $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ *болот.*

Демек бул функциянын аныкталуу областы

$(-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$ *көптүктөрү болот.*

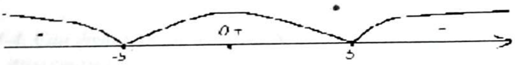
б) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ *бул функция* $25 - x^2 \geq 0$ *болгондо гана анык сандардын көптүгүндө аныкталат.*

$$25 - x^2 \geq 0$$

$(5 - x)(5 + x) \geq 0$ *функциянын нөлдөрүн табабыз.*

$$\begin{cases} 5 - x = 0 \\ 5 + x = 0 \end{cases} \quad x = 5, \;\; x = -5$$

Интервалдар методун колдонобуз.



1-сүрөт.

Интервалдагы функциянын б.а. $25 - x^2$ *функциясынын белгилерин аныктайбыз.*

Демек, функциянын аныкталуу областы

$[-5; 5]$ *кесиндиси болот.*

Аныктама.

x сан көптүгүндө берилген $y = f(x)$ *сан функциясынын графиги деп координата тегиздигинин* $M(x; f(x))$ $x \epsilon X$ *түрүндөгү чекиттеринин Г көптүгүн айтабыз.*

4-мисал. Төмөнкү функциялардын графиктерин «чекиттери» боюнча тургузгула.

а) $y = x^2 - 1$; *б)* $y = |x - 1|$

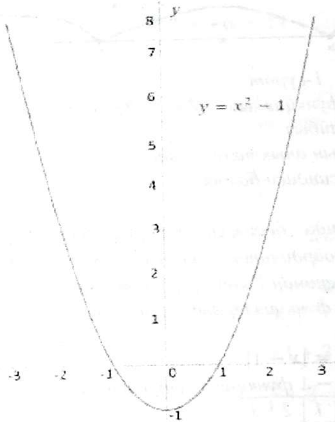
Чыгаруу: *а)* $y = x^2 - 1$ *функциясы үчүн таблица түзөбүз.*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	3	0	-1	0	3	8

Таблицада берилгендер боюнча чекиттерди координаталык тегиздикте белгилейбиз. Аларды жылма сызык менен туташтырабыз.

Натыйжада $y = x^2 - 1$ *функциясынын графигин алабыз.*

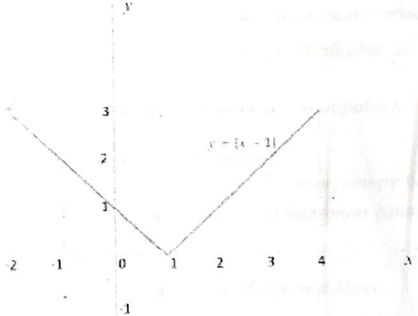
$y = x^2 - 1$



2-сүрөт

б) функциясы үчүн таблица түзөбүз.

	-2	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
	3	*2*	*1*	*0*	*1*	*2*	*3*



3-сүрөт

1-4. Сан функциялары менен аткарылуучу амалдар.

Аныктама.

Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары:

1) жалпы D аныкталуу областына ээ болушса;

2) D областынан алынган ар кандай x_0 саны үчүн

$f(x_0) = g(x_0)$ барабардыгы аткарылса, анда бул функциялар Д областында барабар деп аталышат жана $f(x_0) = g(x_0)$ деп жазылат.

Мисалы, $f(x) = \sqrt{2x}\sqrt{x-3}$, $g(x) = \sqrt{2x^2 - 6x}$ болсо, анда $x \geq 3$ үчүн б.а. Д $= [3; +\infty)$ областында $f(x) = g(x)$ болот.

$x = 4$ болсун, анда $f(4) = \sqrt{2 \cdot 4}\sqrt{4-3} = \sqrt{8}$ болот

$g(4) = \sqrt{2 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4} = \sqrt{32 - 24} = \sqrt{8}$ болот.

Демек f жана g функциялары берилген Д $= [3; +\infty)$ областында барабар функциялар болушат.

Аныктама.

Эгерде Д областынан алынган ар кандай x_0 чекитинде бул областта аныкталган $F(x)$ функциясы $F(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$ шартын канааттандырса, анда $F(x)$ функциясы $f(x)$ жана $g(x)$ функцияларынын суммасы деп аталат жана $F(x) = f(x) + g(x)$ деп жазылат.

1-мисал. $f(x) = \sqrt{x-5}$ *жана* $g(x) = x^2 - 1$ *функцияларынын суммасын тапкыла.*

Чыгаруу: *$f(a) = \sqrt{x-5}$ функциясынын аныкталуу областы $[5; +\infty)$ сан көптүгү болот. $g(x) = x^2 - 1$ функциясынын аныкталуу областы $(-\infty; +\infty)$ аралыгы. Бул функциялардын жалпы аныкталуу областы $[5; +\infty)$ болот. Бул функциялардын суммасы*

$$f(x) + g(x) = \sqrt{x-5} + x^2 - 1 \text{ болуп калат.}$$

Аныктама.

Эгерде y өзгөрүлмөсү D, областынан алынган u аргументинин $y = f(u)$ функциясы болсо, ал эми u өз кезегинде D областынан функиясы болсо, анда y ти x тин татаал функциясы деп айтабыз жана $y = f(g(x))$ деп белгилейбиз.

Мисалы, $y = f(u) = 3u$ *функиясы* $D_1 = [-5;4]$ *аралыгында, ал эми* $u = g(x) = 2x^3 - 1$ *функциясы* $D_2 = [-3;7]$ *аралыгында берилген болсо, анда*

$f(g(x)) = 3(2x^3 - 1) = 6x^3 - 3$ *татаал функциясы* $[-5;4] \cap [-3;7] = [-3;4]$ *аралыгында аныкталат.*

1-мисал. $f(x) = x^2$ *болсун,* $g(x) = 2x + 1$ *болсун. Төмөнкүдөй туюнмаларды тапкыла.*

а) $xf(x^2 - 3x + 1)$;

б) $f^3(x) + g^2(x)$;

в) $f(g(x))$;

г) $g(f(x))$.

Чыгаруу: Татаал функциясынын аныктамасын пайдаланабыз.

а) $xf(x^2 - 3x + 1) = x(x^2 - 3x + 1)^2 = x((x^2 - 3x) + 1)^2 = \; = x(x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 2(x^2 - 3x) + 1) =$

$= x(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1)$;

б) $f^3(x) + g^2(x) = (x^2)^3 + (2x + 1)^2 = x^6 + 4x^2 + 4x + 1$

в) $f(g(x)) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

г) $g(f(x)) = 2x^2 + 1$

2-мисал. а) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+18}$ *берилсе,* $f(3) + f(-3)$ *тапкыла.*

б) $f(x) = x^2 - 2x$ *болсо,*

$f(x + 3)$; $f(x) + 5$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(x - 1)$ *ди тапкыла.*

Чыгаруу: *а)* $f(3) = \frac{3 \cdot 3^2}{3^2+18} = \frac{27}{27} = 1$

$f(-3) = \frac{3 \cdot (-3)^2}{(-3)^2+18} = \frac{27}{27} = 1$

демек $f(3) + f(-3) = 1 + 1 = 2$ *болот.*

б) $f(x) = x^2 - 2x$,

$f(x + 3) = (x + 3)^2 - 2(x + 3) = x^2 + 6x + 9 - 2x - 6 =$

$= x^2 + +4x + 3$;

$f(x) + 5 = x^2 - 2x + 5$;

$f\left(\frac{1}{2}\right) = (\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

$f(x - 1) = (x - 1)^2 - 2(x - 1) = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 =$

$= x^2 - 4x + 3$.

3-мисал. Функциялардын нөлдөрүн тапкыла.

а) $y = 5x - 18$; *б)* $y = -3x(x + 7)$;

в) $y = \sqrt{2x^2 + 3}$; *г)* $y = \sqrt{3x - 15}$.

Чыгаруу: $y = 5x - 18$ *функциясынын нөлдөрүн табуу үчүн* $5x - 18 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз*

$5x = 18$

$x = 18:5$

$x = 3{,}6$

Жообу: 3,6.

б) $y = -3x(x + 7)$, $-3x(x + 7) = 0$

$x = 0$

$x + 7 = 0$

$x = -7$

Жообу: $x = 0$ *жана* $x = -7$

в) $y = \sqrt{2x^2 + 3}$

$2x^2 + 3 = 0$

$2x^2 = -3$ *бул теңдеме тамырга ээ болбойт.*

Демек берилген функциянын нөлдөрү жок.

г) $y = \sqrt{3x - 15}$

$3x - 15 = 0$,

$3x = 15$,

$x = 15:3$, $x = 5$

Жообу: $x = 5$.

1.5. Жуп жана так функциялар.

Аныктама.

X сан көптүгү өзүнүн ар бир x элементи менен бирге ага карама-каршы –x элементин да камтыса, анда ал 0 чекитине карата симметриялуу көптүк деп аталат.

Мисалы, (-6; 6) интервалы,

а) -6 0 6

$[-8, 8]$ *кесиндиси симметриялуу көптүктөр болот.*

б) -8 0 8

4-сүрөт.

Аныктама.

Эгерде $y = f(x)$ *функциясынын аныкталуу областы x симметриялуу көптүк болсо жана* $x \in X$ *үчүн* $f(-x) = f(x)$

барабардыгы аткарылса, анда $f(x)$ функциясы жуп функция деп аталат.

Эгерде $x \in X$ үчүн $f(-x) = -f(x)$ барабардыгы аткарылса, анда $f(x)$ функциясы так функция деп аталат.

Теорема. *Эгерде $y = f(x)$, $x \in X$ функциясы так болсо, анда анын графиги координаталар башталышына карата симметриялуу болот.*

Теорема. *Эгерде $y = f(x)$, $x \in X$ функциясы жуп болсо, анда анын графиги ординаталар огуна карата симметриялуу болот.*

4-мисал. Функциялардын жуп же так экендигин аныктагыла.

а) $f(x) = 3x^2 - 1$; *б)* $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$; *в)* $\varphi(x) = 10x - 9$;

г) $\varphi(x) = x^3 + 3\sqrt{x}$.

Чыгаруу: Аныктаманын негизинде аргументтин карама-каршы маанилеринде функциянын маанилерин табабыз.

а) $f(x) = 3x^2 - 1$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ *болсун*

$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$, $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 1 = 11$

$f(2) = f(-2)$ *демек бул функция жуп болот.*

б) $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ *болсун*

$g(2) = \frac{2^3}{1+2^2} = \frac{8}{5}$, $g(-2) = \frac{(-2)^3}{1+(-2)^2} = \frac{-8}{5}$

$g(2) = g(-2)$ *демек бул функция так болот.*

в) $\varphi(x) = 10x - 9$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ *болсун*

$\varphi(2) = 10 \cdot 2 - 9 = 11$; $\varphi(-2) = 10 \cdot (-2) - 9 = -29$.

Бул функция так да, жуп да болбойт.

г) $\varphi(x) = x^3 + 3\sqrt{x}$ *бул функциянын аныкталуу областы* $[0; +\infty)$ *жарым интервалы, ал симметриялуу көптүк болбойт. Ошондуктан бул функция жуп да, так да болбойт.*

1.3-1.5. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

12. Функциялардын маанилерин көрсөтүлгөн чекиттерде тапкыла.

а) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$; *-1,2,5;*

б) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$; *-2,0,4;*

в) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$; *0,1,3;*

г) $f(x) = 2tg2x - 3;$ $\frac{\pi}{8}, 0, \frac{3\pi}{8}.$

13. Функциянын аныкталуу областын тапкыла.

а) $\frac{3x-7}{x^2-16};$ *б)* $\frac{5x+12}{x^3-8};$

в) $\frac{3-4x}{x^2-4x-5};$ *г)* $\frac{x^2+1}{x^3-2x+4}.$

14. $f(x) = x^2$ *болсун. Төмөнкүдөй туюнтмаларды тапкыла.*

а) $2f^2(x) - 7f(x) - 5;$

б) $xf(x^2 + 2x + 3);$

в) $f(x^2 + 2) + f(x^2 - 2);$

г) $3f^3(x) + 4f^2x - 2f(x).$

15. $f(x) = x^2,$ $g(\dot{x}) = 2x^2 + 1$ *болсо, төмөнкүдөй туюнтмаларды тапкыла.*

а) $2f^2(x) + g^2(x);$

б) $f^3(x) - 3gx;$

в) $f(g(x));$

г) $g(f(x)).$

16. а) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+7}$ *берилсе* $f(4) - f(-4)$*тү тапкыла.*

б) $g(x) = \frac{5x^2-3x}{x+10}$ *берилсе* $g(2) + g(-2)$*ни тапкыла.*

в) $f(x) = 2x^2 - 3x$ *болсо* $f(x+1),\ f(x-1),\ f(3),\ f(-5)$ *ти тапкыла.*

17. Функциянын нөлдөрүн тапкыла.

а) $y = -0{,}5x - 12;$

б) $y = \sqrt{5x^2 + 1};$

в) $y = x(x-4)(x+7);$

г) $y = \sqrt{x^2 - 9}.$

18. Функциялардын жуп экендигин көрсөткүлө.

а) $f(x) = 5x^2 - 2;$

б) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^4}$.

19. Функциялардын так экендигин көрсөткүлө.

а) $f(x) = x(3 + x^2)$;

б) $f(x) = \frac{x^3}{2x^2+1}$.

20. Төмөнкү функцияларды жуп жана так функциялардын көбөйтүндүсү же суммасы түрүндө көрсөткүлө.

а)$(x + 2)^3 + (x - 2)^3$;

б)$5x^4 - 3x + 2$.

21. Функциялардын кайсынысы жуп, кайсынысы так, кайсынысы жуп да, так да эмес экендигин көрсөткүлө.

а) $f(x) = x^4 - x^2 + 2$;

б) $f(x) = \frac{\sqrt{5+x^2}}{3-x}$;

в) $f(x) = 3x - \frac{x^3}{5} + \frac{x^5}{25}$;

г)$f(x) = 4x^3 - 5x$.

1.6. Өсүүчү жана кемүүчү функциялар.

Экстремумдар.

Аныктама.

Эгерде X көптүгүндө берилген f функциясынын маанилери аргумент x чоңойгондо чоңойсо(кичирейсе), анда бул функция X көптүгүндө өсүүчү(кемүүчү) деп аталат. Башкача айтканда $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ *көптүгүндө каалагандай x үчүн* $x_1 < x_2$ *болгондо* $f(x_1) < f(x_2)$ *болсо, анда f функциясы X көптүгүндө өсөт.*

Эгерде $x_1 \in X$ жана $x_2 \in X$ үчүн $x_1 < x_2$ болгондо $f(x_1) > f(x_2)$ болсо, X көптүгүндө функция кемийт.

Аныктама.

X көптүгүндө f функциясы $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ жана $x_1 < x_2$ үчүн $f(x_1) \leq f(x_2)$ (тиешелүү түрдө $f(x_1) \geq f(x_2)$) шартын канааттандырса, анда бул функцияны кемибоочү(өспөөчү) деп аташат.

1-мисал. $y = 2x + 3$ *функциясы берилсин, бул функциянын аныкталуу областы* $D = R$. $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ *болсун, анда* $f(2) = 7$, $f(5) = 13$ *болот. Мында* $x_1 < x_2$ *үчүн* $f(2) < f(5)$ *шарты канааттандырылды.*

Демек, $y = 2x + 3$ *функциясы өсүүчү болот.*

2-мисал. $y = -3x + 5$ *функциясы берилсин. Бул функциянын аныкталуу областы* $D = R$. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ *болсун, анда* $f(1) = 2$ *жана* $f(3) = -4$ *болот. Мында* $x_1 < x_2$ *үчүн* $f(1) < f(3)$ *шарты канааттандырылды. Демек,* $y = -3x + 5$ *функциясы кемүүчү болот.*

X көптүгүндө өсүүчү же кемүүчү функцияларды жалпысынан X көптүгүндө монотондуу деп аташат.

Монотондуу функциялар төмөндөгүдөй касиеттерге ээ:

1. Эгерде f функциясы X көптүгүндө өссө $f + c$ функциясы да X көптүгүндө өсөт.

2. Эгерде f функциясы X көптүгүндө өссө жана $c > 0$ болсо, анда cf функциясы да X көптүгүндө өсөт.

3. Эгерде f функциясы X көптүгүндө өссө, $-f$ функциясы бул көптүктө кемийт.

4. Эгерде f функциясы X көптүгүндө өссө жана белгиси өзгөрбөсө, анда $\frac{1}{f}$ функциясы бул көптүктө кемийт.

5. Эгерде f жана g функциялары X көптүгүндө өсүшсө, $f + g$ функциясы да бул көптүктө өсөт.

6. Эгерде f жана g функциялары X көптүгүндө өсүшсө жана терс эмес болушса, анда алардын $f \cdot g$ көбөйтүндүсү g X көптүгүндө өсөт.

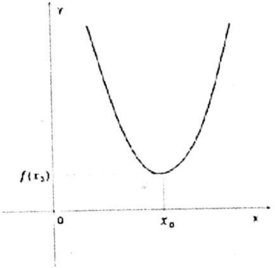
7. Эгерде f функциясы X көптүгүндө өссө жана терс эмес болсо, ал эми n натуралдык сан болсо, анда f^n функциясы да X көптүгүндө өсөт.

8. Эгерде f функциясы X көптүгүндө өссө, ал эми g функциясы f функциясынын маанилеринин $E(f)$ көптүгүндө өссө, анда бул функциялардан түзүлгөн $g(f)$ татаал функциясы да X те өсөт.

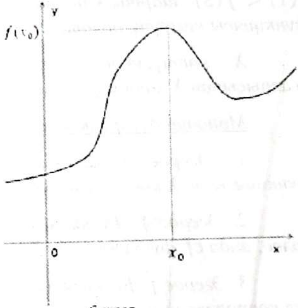
Кемүүчү функциялар да жогорудагыдай касиеттерге ээ болот.

Аныктама.

Эгерде x_0 чекитинин кандайдыр бир аймагындагы бардык x үчүн $f(x) \geq f(x_0)$ барабарсыздыгы аткарылса, x_0 чекити f функциясынын минимум чекити деп аталат. (5-сүрөт)



5-сүрөт



6-сүрөт

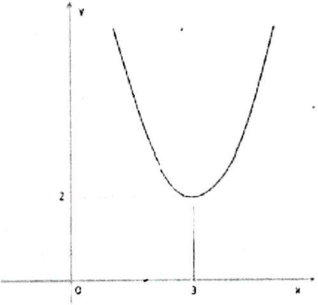
Эгерде x_0 чекитинин кандайдыр бир аймагындагы бардык x үчүн $f(x) \leq f(x_0)$ барабарсыздыгы канааттандырылса, x_0 чекити f функциясынын максимум чекити деп аталат. (6-сүрөт)

Функциянын максимум жана минимум чекиттерин жалпысынан функциянын экстремум чекиттери деп аташат.

Функциянын бул чекиттердеги маанилери функциянын экстре-мумдары деп аталат.

Максимум чекити x_{max} деп, минимум чекити x_{min} деп белгиленет.

Функциянын бул чекиттердеги маанилери тиешелүү түрдө y_{max} жана y_{min} деп белгиленет.



7-сүрөт

3-мисал. Төмөнкү функциялардын өсүүчү же кемүүчү экендигин изилдегиле.

а) $f(x) = (x-3)^2 + 2;$

б) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$

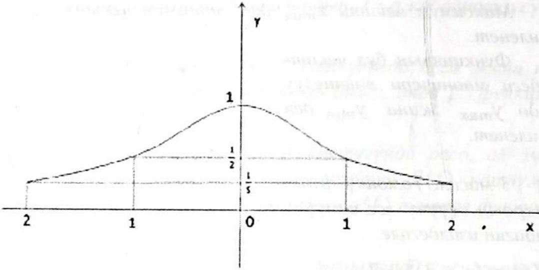
Чыгаруу:

а) $f(x) = (x-3)^2 + 2$ *квадраттык функциясынын графиги чокусу (3;2) чекити болгон парабола болот. Графиктен корүнүп тургандай функция* $(-\infty; 3]$ *аралыгында кемийт,* $[3; +\infty)$ *аралыгында өсөт.(7-сүрөт)*

б) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ *функциясы* $(-\infty; +\infty)$ *аралыгында аныкталган. Аргументтин айрым маанилери үчүн таблица түзөбүз. Таблица боюнча график чийебиз. Графикке байкоо жүргүзсөңөр f функциясы* $(-\infty; 0]$ *аралыгында өсүүчү,* $[0; +\infty)$ *аралыгында кемүүчү болот.*

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

4-мисал. $(x^2-3)^2$ функциясы (–3;0) интервалында өсүүчү, (0; 3)



8-сүрөт

интервалында кемүүчү экендигин далилдегиле.

Далилдөө: Функциянын берилген аралыкта өсүүчү же кемүүчү боло тургандыгы жөнүндөгү аныктамадан пайдаланабыз.

(-3;0) интервалынын аргументинин эки маанисин алабыз, ал маанилерде функциянын маанилерин салыштырабыз.

$f(-2)=((-2)^2-3)^2=(4-3)^2=1;$

$f(-1)=((-1)^2-3)^2=(1-3)^2=4.$ Демек аргументтин чоң маанисине, башкача айтканда $-2<-1$ ге функциянын да чоң мааниси туура келди, башкача айтканда $f(-2)<f(-1)$ болду. (-3;0) аралыгында функция өсүүчү.

(0; 3) аралыгынан $x_1=1$, $x_2=2$ маанилерин алалы.

$f(1)=(1^2-3)^2=(1-3)^2=4;$

$f(2)=(2^2-3)^2=(4-3)^2=1.$ Демек $x_1<x_2$ үчүн $f(x_1)<f(x_2)$ шарты аткарылды.

(0; 3) аралыгында функция кемүүчү болот.

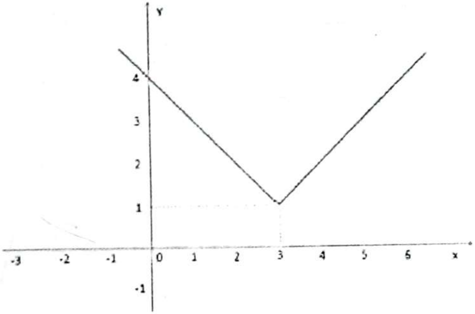
5-мисал. Төмөнкү функциялардын өсүүчү жана кемүүчү интервалдарын тапкыла.

а) $y=1+|x-3|$; б) $y=|x-2|-|x+4|$.

Чыгаруу: а) $y=1+|x-3|$ функциясынын аныкталуу областы D=R. Аргумент x тин айрым маанилери үчүн таблица түзөбүз. График чийебиз.

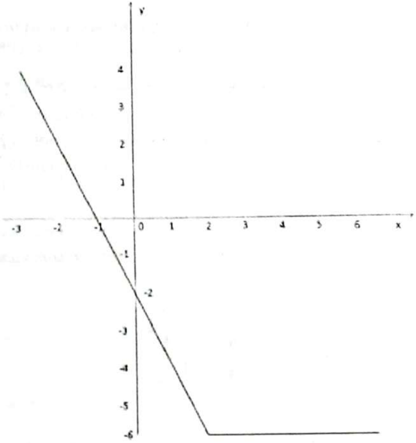
x	0	1	2	3	4	5	6
y	4	3	2	1	2	3	4

Бул функция $(-\infty; 3)$ *аралыгында кемүүчү,* $(3; +\infty)$ *аралыгында өсүүчү болот.*



9-сүрөт

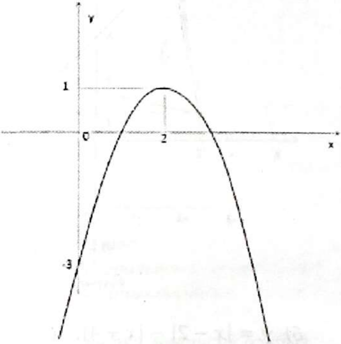
б) $y = |x-2| - |x+4|$, *x тин айрым маанилери үчүн таблица түзөбүз.*



10-сүрөт

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	2	0	-2	-4	-6	-6	-6

Графикке байкоо жүргүзсөк, берилген функция $(-\infty; 2)$ *интервалында кемүүчү,* $(2; +\infty)$ *интервалында өспөөчү (кемибөөчү) функция болот.*



11-сүрөт

6-мисал. Функциялардын өсүү, кемүү аралыктарын, максимум жана минимум чекиттерин, функциянын экстремумун тапкыла.

а) $y = -x^2 + 4x - 3$;

б) $y = \frac{4}{x-3}$.

Чыгаруу:

а) $y = -x^2 + 4x - 3$; $-x^2 + 4x - 3$ *квадраттык үч мүчөсүнүн толук квадратын бөлүп алабыз.*

$$-x^2 + 4x - 3 = -(x^2 - 4x + 4 - 1) = -(x - 2)^2 + 1.$$

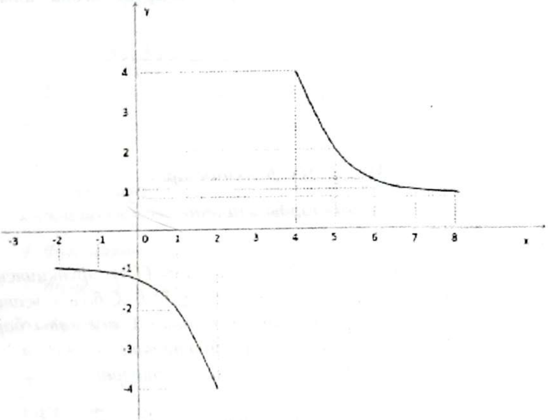
$y = -(x - 2)^2 + 1$ *функциясынын графиги тармактары төмөн караган, чокусу (2;1) чекити болгон парабола болот. График боюнча анализ жүргүзсөк: функция* $(-\infty; 2)$ *аралыгында өсөт.* $(2; +\infty)$ *аралыгында кемийт.*

$x_{max} = 2$, $y_{max} = 1$. *Минимум чекиттери жок.*

б) $y = \frac{4}{x-3}$ *, функциянын аргументи x тин айрым маанилерине таблица түзөбүз.*

x	-2	-1	0	1	2	4	5	6	7	8
y	$-\frac{4}{5}$	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$

График боюнча анализ жүргүзсөк функция $(-\infty; 2)$ *интервалында кемийт жана* $(2; +\infty)$ *интервалында да кемийт. Функция экстремумга ээ болбойт.*



12-сүрөт

1.6. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

22. Төмөнкү функциялардын өсүүчү жана кемүүчү аралыктарын тапкыла.

а) $f(x) = (x+3)^2 + 2;$ *б)* $f(x) = x^6 + x^4 - 3x^2 + 2;$

в) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + 1;$ *г)* $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3} - 2.$

23. Берилген боюнча f *функциясынын графигинин эскизин чийгиле.*

а) $x_{max} = -2,\ x_{min} = 3,\ f(-2) = 4,\ f(3) = -4;$

б) $x_{max} = -3,\ x_{max} = 4,\ x_{min} = -2,$

$f(-3) = 6,\ f(4) = 3,\ f(-2) = -4;$

в) f *–жуп функция*

$x_{max} = 2,\ x_{min} = 4,\ f(2) = -4,\ f(4) = -3;$

г) f −так функция

$x_{max} = -3,\ x_{min} = -1,\ f(-3) = 5,\ \ f(-1) = -4.$

24. Функциянын өсүүчү, кемүүчү аралыктарын жана анын экстремумдарын тапкыла.

а) $f(x) = -3x^2 + 12x - 14;$ *б)* $f(x) = -\frac{1}{x+2};$

в) $f(x) = x^2 + 2x;$ *г)*$f(x) = -2x + 1.$

1.7. Мезгилдүү функциялар.

Функцияларды изилдөө.

Аныктама.

Аныкталуу областы X болгон $y = f(x)$ функциясы берилсин. Эгерде каалаган $x \in X$ үчүн: $(x \pm \mathrm{T}) \in X$ болсо жана $f(x \pm \mathrm{T}) = f(x)$ барабардыгы аткарылгандай $\mathrm{T} \neq 0$ саны бар болсо, анда $f(x)$ функциясы мезгилдүү деп аталат.

T саны $f(x)$ функциясынын мезгили деп аталат.
$f(x + \mathrm{T}) = f(x) = f(x - \mathrm{T})$.

Эгерде T саны функциянын мезгили болсо, $\pm 2\mathrm{T}, \pm 3\mathrm{T}, \ldots, \pm nT$ сандары да ал функциянын мезгили болот.

Эгерде f функциясы мезгилдүү жана мезгили T болсо, анда $Af(kx + b)$ функциясы да мезгилдүү болот, анын мезгили $\frac{T}{|k|}$ барабар болот. Мында, A, k жана b лар турактуу сандар.

Мисалы: $\frac{7}{3}$ жана $\frac{4}{5}$ сандары f функциясынын мезгили болсо, $\frac{1}{15}$ саны да анын мезгили болоорун далилдегиле.

Чыгаруу: $f\left(x + m \cdot \frac{7}{3}\right) = f(x),\ f\left(x + n \cdot \frac{4}{5}\right) = f(x).$

$f\left(x + \frac{1}{15}\right) = f(x)$ *болоорун көрсөтөбүз.*

$$f\left(x + \frac{1}{15}\right) = f\left(x + \frac{1}{15} + m \cdot \frac{7}{3} + n \cdot \frac{4}{5}\right) = f\left(x + \frac{1+35m+12n}{15}\right),$$

мында $1 + 35m + 12n = 0$ *болсо,* $f\left(x + \frac{1}{15}\right) = f(x)$ *барабардыгы аткарылат.*

$m = 0,\ n = -\frac{1}{12}$ *же* $m = -\frac{1}{35},\ n = 0$ *болгон учурда* $1 + 35m + 12n = 0$ *болот.*

Функцияларды изилдөө.

Функциялар төмөнкү схема боюнча изилденет.

1. Функциянын аныкталуу областын табуу.

2. Функциянын жуп же так экендигин жана мезгилдүүлүгүн билүү.

3. Функциянын графигинин координаталык октор менен кесилишкен чекиттерин табуу.

4. Функциянын белгилеринин турактуулук аралыктарын табуу.

5. Функциянын өсүүчү, кемүүчү аралыктарын табуу.

6. Функциянын максимум же минимум чекиттерин табуу жана ал чекиттерде функциянын маанилерин эсептөө.

7. Функциянын өзгөрүү тартибин аныкталуу областына болбогон өзгөчө чекиттердин аймагында жана аргументтин чоң маанилеринде (модулу боюнча) эсептөө.

Мисал: $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ *функциясын изилдегиле.*

Чыгаруу: Функцияларды изилдөө схемасы боюнча изилдейбиз.

1. Бул функциянын аныкталуу областы -1 жана 1ден башка бардык сандар, себеби $x = -1$ *жана* $x = 1$ *болгондо, бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айланып, бөлчөк мааниге ээ болбой калат.* $D(f) = (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$

2. $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$; $f(-x) = f(x)$.

Демек, бул функция жуп.

3. $\frac{1}{x^2-1} = 0$ *теңдемесинин тамыры жок.*

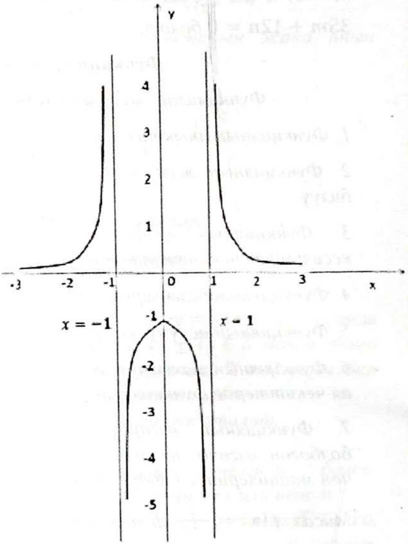
Демек, функциянын графиги Ох огу менен кесилишпейт.

$y = \frac{1}{0^2-1} = -1$, *ордината огу менен (0; -1) чекитинде кесилишет.*

4. $(-\infty;\ -1)$ жана $(1;\ +\infty)$ *аралыгында оң, (-1;1) аралыгында функция терс маанилерди алат.*

5. $(-\infty;\ -1)$ жана $(-1;\ 0)$ *аралыктарында өсөт,* $(0;\ 1)$ жана $(1;\ +\infty)$ *аралыктарында кемийт.*

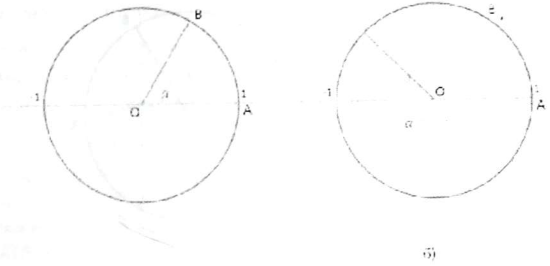
6. *Функциянын экстремумдары:* $x_{max} = 0;\ y_{max} = -1$. *Вертикалдык асимптоталар* $x = -1$ *жана* $x = 1$ *түздөрү, горизонталдык асимптотасы* $y = 0$ *түз сызыгы.*



13-сурот

1.8. Чыныгы сан менен бурчтун чоңдугунун байланышы. Бирдик айлана жана сан огу.

Аныктама. *Борбору координаталар башталышында жаткан, радиусу 1ге барабар болгон айлана, бирдик айлана деп аталат.*



14-сүрөт

14-сүрөттө көрсөтүлгөн бирдик айланалардын Ox огу менен кесилишкен чекиттери $A(1;0)$ болот. $\overline{OA}$ векторун кыймылсыз деп, $\overline{OB}$ векторун кыймылдуу вектор деп атайлы.

$\overline{OB}$ кыймылдуу векторун $\overline{OA}$ кыймылсыз векторуна дал келтирип, андан кийин аны айлана боюнча айлантып, $\overline{OA}$ векторуна алып келелй, бул бурууну толук бир буруу деп атайбыз.

$\overline{OB}$ векторун саат жебесинин жүрүш багытына карама-каршы бурууну оң деп, саат жебесинин жүрүш багыты боюнча бурууну терс деп эсептөө кабыл алынган.

$\overline{OB}$ векторун оң багыт боюнча толук бурсак $\widehat{AOB} = 360^0$ бурчун алабыз; терс багыт боюнча толук бурсак $\widehat{AOB} = -360^0$ бурчун алабыз.

14-сүрөттө а) $\angle AOB = \alpha$ оң бурч болот,

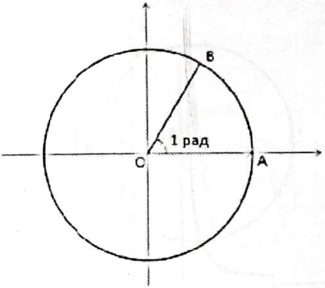
б) $\angle AOB = \alpha$ терс бурч болот.

$\overline{OB}$ векторун оң багыт, терс багыт боюнча бурууда ар түрдүү бурчтар пайда болот.

***Аныктама.** Жаасынын узундугу радиуска барабар болгон борбордук бурчтун чоңдугу 1 радиан деп аталат.*

15-сүрөттө AB жаасынын узундугу OA радиусунун узундугуна барабар. Демек, AOB бурчунун чоңдугу 1 радианга барабар болот.

$\overline{OB}$ *кыймылдуу вектору саат жебесинин жүрүшүнө каршы толук бурулганда, 2π радиан бурч түзүлөт. Анткени айлананын узундугу $2\pi R$ге барабар.*



15-сүрөт

Ошондуктан 2π радиан=360^0 болот.

$$1^0 = \frac{2\pi}{360} \approx 0{,}17453 \text{ рад}.$$

Мисал, $4\text{рад} = \left(\frac{180^0}{\pi}\right) \cdot 4 \approx 229^0;$

$$10\text{рад} = \left(\frac{180^0}{\pi}\right) \cdot 10 \approx 573^0;$$

Жалпы учурда, $a \text{ рад} = \left(\frac{180^0}{\pi}\right) \cdot a$

15-сүрөттө көрсөтүлгөн B чекитине бири-биринен 2πге айырмаланышкан чексиз көп бурчтар туура келет. Анткени $\overline{OB}$ векторун оң же терс багыт боюнча каалаган санда толук айландырсак, вектордун учу дайыма B абалына келет.

Ошентип, ар кандай чыныгы $a = \propto + 2\pi k \ (k \in Z)$ санына бирдик айлананын жалгыз гана B чекити туура келет. Ушул себептүү бирдик айлананы, бирдик сан айланасы деп атоого болот.

Нөл санына кыймылсыз вектордун учу, башкача айтканда сан айланасынын A чекити туура келет.

Мында бирдик сан айланасынын узундугу 2πге барабар болгондуктан $\propto$, $\propto + 2\pi$, $\propto - 2\pi$, $\propto + 4\pi$, $\propto - 4\pi$ жана башка сандарына бул айлананын бир эле B чекити туура келет. Ошондуктан сан айланасын сан огу «түрүлгөн» айлана деп элестетүүгө болот.

Жалпы учурда, $a = a + 2\pi k$ чыныгы сандары сан айланасынын бир эле $B_\propto$ чекити менен сүрөттөлүшөт.

1-мисал. Координаталык тегиздикте AOB бурчун, кыймылдуу $\overline{OB}$ векторун кыймылсыз $\overline{OA}$ векторунан:

а) оң толук буруунун $\frac{1}{3}$ не буруу;

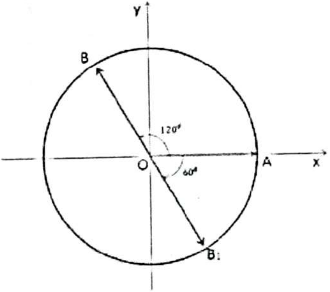
б) терс толук буруунун $\frac{1}{6}$ не буруу аркылуу түзгүлө.

Чыгаруу: *а) оң толук буруу* 360^0*ка барабар. Анын* $\frac{1}{3}$ *не буруу, бул* $360^0 \cdot \frac{1}{3} = 120^0$*, демек* $\overline{OB}$ *кыймылдуу векторун* 120^0*ка оң багыт боюнча бурабыз.*

$\widehat{AOB} = 120^0$

б) терс толук буруу -360^0*ка барабар. Анын* $\frac{1}{6}$ *не буруу,* $-360^0 \cdot \frac{1}{6} = -60^0$ *болот. Демек* $\overline{OB}$ *векторун* 60^0*ка терс багыт боюнча бурабыз.*

$\widehat{AOB_1} = -60^0$.

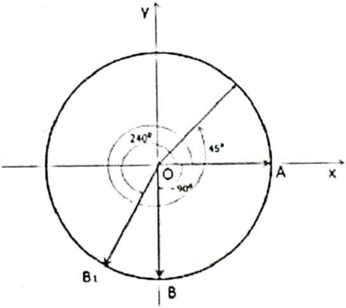


16-сүрөт

2-мисал. -90^0, 240^0, 2205^0, $\frac{9\pi}{2}$, -7π *бурчтарын түзгүлө.*

Чыгаруу: -90^0 *бурчун түзүү үчүн* $\overline{OB}$ *кыймылдуу векторун терс багыт боюнча* 90^0*ка бурабыз.* $\widehat{AOB} = -90^0$.

240^0 *бурчун түзүү үчүн* $\overline{OB}$ *кыймылдуу векто-рун оң багыт боюнча* 240^0*ка бурабыз.* $\widehat{AOB_1} = 240^0$.



17-сүрөт

$2205^0 : 360^0 = 6(45^0$ калдык). *Демек бул бурч 6 жолу толук буруу жана дагы* 45^0*ка оң багытка буруу менен түзүлөт. Түзүү 17-сүрөттө көрсөтүлгөн.*

$\frac{9\pi}{2} = \frac{9 \cdot 180^0}{2} = 810^0$

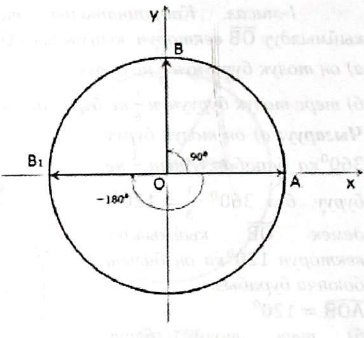
$810^0 : 360^0 = 2(90^0$ калдык).

Бул бурч 2 жолу толук буруу жана 90^0ка оң багытка буруу менен түзүлөт.

$-7\pi = -7 \cdot 180^0 = -1260^0$,

$-1260^0 : 360^0 =$

$3\ (-180^0$ калдык). *Бул бурч терс багыт боюнча 3 жолу толук буруу жана -180^0ка буруу менен түзүлөт.*



18-сүрөт

3-мисал. а) 20^0; *б)* $77^0 30'$; *в)* -2280^0; *г)* 7830^0 *бурчтарынын радиандык чендери тиешелүү түрдө а)* $\frac{\pi}{9}$; *б)* $\frac{31\pi}{72}$; *в)* -16π; *г)* $\frac{87\pi}{2}$ *болорун көрсөткүлө.*

Чыгаруу: *Радиандык чендерди градустук ченге айландыралы.*

а) $\frac{\pi}{9} = \frac{180^0}{9} = 20^0$;

б) $\frac{31\pi}{72} = \frac{31 \cdot {}^{5}\cancel{180^0}}{\cancel{72}_2} = \frac{31 \cdot 5^0}{2} = \frac{155^0}{2} = (77\frac{1}{2})^0 = 77^0 30'$;

в) $-16\pi = -16 \cdot 180^0 = -2280^0$; *г)* $\frac{87\pi}{2} = \frac{87 \cdot 180^0}{2} = 7830^0$.

4-мисал. Төмөнкү бурчтарды радиандык чен менен туюнткула.

а) 80^0; *б)* -630^0; *в)* 35^0; *г)* -100^0.

Чыгаруу: *а)* $80^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 80^0 = \frac{4\pi}{9}$;

б) $-630^0 = \frac{\pi}{{}_2\cancel{180^0}} \cdot \left(-{}^{7}\cancel{630^0}\right) = -\frac{7\pi}{2}$;

в) $35^0 = \frac{\pi}{{}_{36}\cancel{180^0}} \cdot {}^{7}\cancel{35^0} = \frac{7\pi}{36}$;

г) $-100^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot (-100^0) = -\frac{5\pi}{9}$.

1.7.-1.8. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

25. Функцияларды изилдегиле жана графиктерин түзгүлө.

а) $f(x) = x^2 + x$; *б)* $f(x) = |x| - x^2$;

в) $f(x) = 1 - \sqrt{x+2}$; *г)* $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$.

26. *Эгерде* $\boldsymbol{\alpha}$*:* $\frac{3\pi}{2}$; -3π; 450^0; -720^0*тарга барабар болсо, чекиттин бирдик айланадагы координаталарын тапкыла.*

27. *Төмөнкү бурчтарды градустук чен менен туюнткула.*

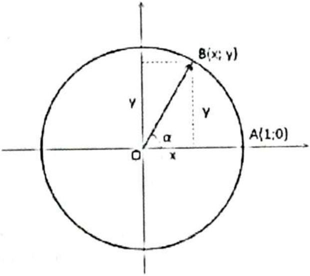
а) $\frac{5\pi}{2}$; *б)3 рад;* *в)* $\frac{11\pi}{9}$; *г)* 3π; *д)7 рад;* *е)-2 рад.*

28. *Төмөнкү бурчтарды радиандык чен менен туюнткула.*

а) $157^0 30'$; *б)*324^0; *в)* 60^0; *г)* 150^0; *д)* 192^0; *е)* 220^0.

1.9. Сан аргументтүү тригонометриялык функциялар жана алардын касиеттери.

Аныктама. *Бирдик айланадагы A(1;0) чекитин 0 борборуна карата* $\boldsymbol{\alpha}$ *радиан бурчка жылдырганда пайда болгон B(x; y) чекитинин ординатасы α санынын синусу деп (sin α), ал эми ал чекиттин абсциссасы α санынын косинусу (cos α) деп аталат.*



19-сүрөт

Аныктама боюнча sin α=y; cos α=x.

Аныктама. sin α *нын* ***cos α*** *га болгон катышы аныктаган сан α санынын тангенси деп аталат. Мында* $\boldsymbol{\cos\alpha \neq 0}$ *же* $\propto \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

cos α *нын* ***sin α*** *га болгон катышы аныктаган сан α санынын котангенси деп аталат. Мында* $\boldsymbol{\sin\alpha \neq 0}$ *же* $\propto \neq k\pi, k \in Z$.

Аныктама боюнча

$$tg \propto = \frac{sin\propto}{cos\propto} = \frac{y}{x}; \quad ctg \propto = \frac{cos\propto}{sin\propto} = \frac{x}{y}.$$

Эскертүү: Мындан ары, керек болгон учурларда, сан аргументтүү тригонометриялык функциялардын аргументтерин адаттагыдай эле x аркылуу белгилеп, $y = sinx, \quad y = cosx, \quad y = tgx, \quad y = ctgx$ *деп жазабыз.*

Сан аргументтүү sinx жана cosx функциялары төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот.

Теорема. $y = sinx$ *жана* $y = cosx$ *функцияларынын аныкталуу областары чыныгы сандардын көптүгү R болот.*

Теорема. $sinx$ *функциясы x тин* $\pi n,\ n \in Z$, *түрүндөгү маанилеринде нөлгө айланат.*

$cosx$ *функциясы x тин* $\pi n + \frac{\pi}{2},\ n \in Z$, *түрүндөгү маанилеринде нөлгө айланат.*

Теорема. $cosx$ *жана* $sinx$ *функциялары мезгилдүү. Алардын негизги мезгилдери* 2π *ге барабар.*

Теорема. $cos \propto$ *функциясы жуп, ал эми* $sin \propto$ *функциясы так функциялар болушат. (∝-чыныгы сан).*

$$cos(-\propto) = cos \propto; \quad sin(-\propto) = -sin \propto.$$

Теорема. $cosx$ *функциясы* $[0;\pi]$ *кесиндисинде кемийт,* $[-\pi;0]$ *кесиндисинде өсөт.*

$sinx$ *функциясы* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *кесиндисинде өсөт, ал эми* $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ *кесиндисинде кемийт.*

Теорема. $y = sinx$ *жана* $y = cosx$ *функцияларынын маанилеринин көптүгү* $[-1;1]$ *кесиндисин түзөт.*

Сан аргументтүү тангенс жана котангенс төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот.

Теорема. $y = tgx$ *функциясынын аныкталуу областы* $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$,

ал эми $y = ctgx$ *функциясынын аныкталуу областы* $x \neq \pi n,\ n \in Z$ *болгон чыныгы сандардын көптүгү болот.*

Теорема. tgx *функциясы x тин* $x = \pi n,\ n \in Z$ *түрүндөгү,* ал эми $ctgx$ функциясы x тин $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ түрүндөгү маанилеринде гана нөлгө айланат.

Теорема. tgx жана $ctgx$ функциялары мезгилдүү, алардын мезгилдери π ге барабар.

Теорема. tgx жана $ctgx$ функциялары так функциялар.

Теорема. tgx функциясы $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгында өсөт, $ctgx$ функциясы $\left[\frac{\pi}{2}; 0\right)$ аралыгында кемийт.

1-мисал. Төмөнкү функциялардын кайсылары жуп, кайсынысы так:

а) sin^5x ; *б)* cos^7x ; *в)* sin^2x.

Чыгаруу: *а)* $f(x) = sin^5x$ аргументтин карама-каршы маанилеринде берилген функциянын кандай болушун текшеребиз.

$f(-x) = (sin(-x))^5 = (-sinx)^5 = -sin^5x$.

$f(-x) = -f(x)$ барабардыгы аткарылды, демек sin^5x так функция болот.

Чыгаруу: *б)* $f(x) = cos^7x$;

$f(-x) = (cos(-x))^7 = (cosx)^7 = cos^7x$

$f(-x) = f(x)$ барабардыгы аткарылды, демек cos^7x функциясы жуп болот.

Чыгаруу: *в)* $f(x) = sin^2x$.

$f(-x) = (sin(-x))^2 = (-sinx)^2 = sin^2x$.

$f(-x) = f(x)$ демек, sin^2x функциясы жуп.

2-мисал. Төмөнкү функциялардын ар биринин эң кичине оң мезгилин тапкыла.

а) $f(x) = 3sin\frac{x}{4}$; *б)* $f(x) = sinx \cdot cosx$;

в) $f(x) = 2tg3x$; *г)* $f(x) = cos5x \cdot cos3x + sin5x \cdot sin3x$.

Чыгаруу: $f(x)$ функциясынын мезгили T болсо, $Af(kx + b)$ функциясынын мезгили $\frac{T}{|k|}$ болот деген ырастоону пайдаланабыз.

а) $f(x) = 3sin\frac{x}{4}$; $sinx$ функциясынын мезгили 2π ге барабар, анда берилген функциянын мезгили $\frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ болот.

б) $f(x) = sinx \cdot cosx = \frac{1}{2} sin2x$; *бул функциянын эң кичине мезгили* $\frac{2\pi}{2} = \pi$ *болот.*

в) $f(x) = 2tg3x$; tgx *мезгили* π *ге барабар, анда берилген функциясынын эң кичине мезгили* $\frac{\pi}{3}$ *кө барабар.*

г) $f(x) = cos5x \cdot cos3x + sin5x \cdot sin3x$.

$$cos5x \cdot cos3x + sin5x \cdot sin3x = cos(5x - 3x) = cos2x$$

$f(x) = cos2x$ *бул функциянын эң кичине мезгили* $\frac{2\pi}{2} = \pi$ *болот.*

3-мисал. Функциялардын өсүү жана кемүү аралыктарын көрсөткүлө.

а) $y = sin2x$; *б)* $y = cos3x$;

в) $y = sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; *г)* $y = cos\left(\frac{x}{2} + 3\right)$.

Чыгаруу: а) $y = sin2x$; $sinx$ *функциясынын өсүү, кемүү аралыктарын пайдаланабыз.*

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ *(*$\frac{1}{2}$ *ге көбөйтөбүз)*

$-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$ *аралыктарында өсөт.*

Эми кемүүчү аралыктарын табабыз.

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ *(*$\frac{1}{2}$ *ге көбөйтөбүз)*

$\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n$ *аралыктарында кемийт.*

Чыгаруу: б) $y = cos3x$; $cosx$ *функциясынын өсүү, кемүү аралыктарын пайдаланабыз.*

$-\pi + 2\pi n < 3x < 0 + 2\pi n$ *(*$\frac{1}{3}$ *ге көбөйтөбүз)*

$-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{2\pi n}{3}$ *аралыктарында өсөт.*

$0 + 2\pi n < 3x < \pi + 2\pi n$ *(*$\frac{1}{3}$ *ге көбөйтөбүз)*

$\frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$ *аралыктарында кемийт.*

Чыгаруу: в) $y = sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; *өсүү аралыгын табабыз.*

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ *(*$\frac{\pi}{3}$ *тү кошобуз)*

$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ *өсүү аралыктары.*

Эми кемүү аралыктарын табабыз.

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x - \frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ *(*$\frac{\pi}{3}$ *тү кошобуз)*

$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+2\pi n < x < \frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+2\pi n$

$\frac{5\pi}{6}+2\pi n < x < \frac{11\pi}{6}+2\pi n$ *кемүү аралыктары.*

Чыгаруу: г) $y = \cos\left(\frac{x}{2}+3\right)$, $\cos x$ *функциясынын өсүү, кемүү аралыктарын пайдаланабыз.*

$-\pi+2\pi n < \frac{x}{2}+3 < 0+2\pi n$ *(-3тү кошуп, 2ге көбөйтөбүз)*

$-\pi-3+2\pi n < \frac{x}{2} < -3+2\pi n$

$-2\pi-6+4\pi n < x < -6+4\pi n$ *өсүү аралыктары.*

$2\pi n < \frac{x}{2}+3 < \pi+2\pi n$, $-3+2\pi n < \frac{x}{2} < \pi-3+2\pi n$,

$-6+4\pi n < x < 2\pi-6+4\pi n$ *кемүү аралыктары.*

4-мисал. Эсептегиле.

а) $\cos 210^0 + 3\sin 420^0$; *б)* $\sin(-30^0)\cdot tg(-45^0)$;

в) $\cos(-60^0) + ctg405^0$; *г)* $ctg(-60^0)\cdot \sin 30^0$.

Чыгаруу : Келтирүүнүн формулаларын пайдаланабыз

а) $\cos 210^0 + 3\sin 420^0 = = \cos(180^0+30^0) + 3\sin(360^0 + +60^0) = -\cos 30^0 + 3\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$;

б) $\sin(-30^0)\cdot tg(-45^0) = -\sin 30^0\cdot(-tg45^0) = -\frac{1}{2}\cdot(-1) = \frac{1}{2}$;

в) $\cos(-60^0) + ctg405^0 = \cos 60^0 + ctg(360^0+45^0) = = \cos 60^0 + ctg45^0 = \frac{1}{2}+1 = 1\frac{1}{2}$;

г) $ctg(-60^0)\cdot\sin 30^0 = -ctg60^0\cdot\sin 30^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

5-мисал. Функциялардын аныкталуу областын жана маанилеринин областын тапкыла.

а) $y = 1+\cos x$; *б)* $y = 3+2\sin x$;

в) $y = -\frac{1}{2}tgx$; *г)* $y = 3{,}2\cos x$.

Чыгаруу: а) $y = 1+\cos x$ *функциясынын аныкталуу областы* $D(y) = R$ *болот.* $\cos x$ *функциясынын маанилеринин көптүгү* $[-1;1]$ *кесиндисин түзгөндүктөн,* $1+\cos x$ *функциясынын маанилеринин көптүгү* $E(y) = [0;2]$ *кесиндисин түзөт.*

б) $y = 3+2\sin x$; $D(y) = R$, $E(y) = [1;5]$

в) $y = -\frac{1}{2}tgx$ *аныкталуу областы* $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$ *болгон чыныгы сандардын көптүгү. Маанилеринин көптүгү* $(-\infty;\ +\infty)$.

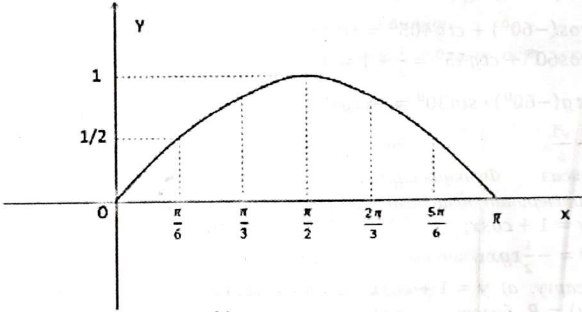
г) $y = 3{,}2cosx;$ *Аныкталуу областы* $D(y) = R,$ *маанилеринин көптүгү* $E(y) = [-3{,}2; 3{,}2]$.

1.10. Сан аргументтүү тригонометриялык функциялардын графиктери.

$y = \sin x$ *функцияларынын графигин түзөлү. Бул функциянын аныкталуу областы чыныгы сандардын көптүгү R.* $[0;\pi]$*кесиндисинде төмөндөгүдөй таблица түзүп алалы.*

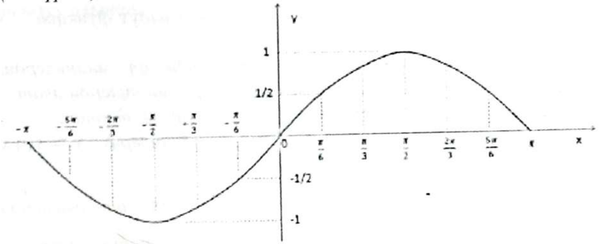
x	*0*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	*0*

Бул таблица боюнча 20-сүрөттөгүдөй график түзөбүз. $\sin x$ *функциясы так функция, ошондуктан анын графиги координаталар башталышына карата симметриялуу болот.*



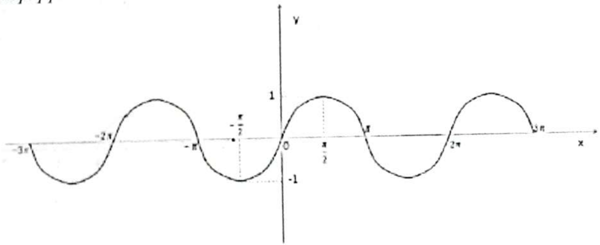
20-сүрөт

Биз $[-\pi; \pi]$ кесиндисиндеги $\sin x$ функциясынын графигин чийдик (21-сүрөт).



21-сүрөт

$y = \sin x$ функциясы мезгили 2π болгон мезгилдүү функция. Мына ушуну негизден $\sin x$ тин бүткүл сан огундагы графигин түзүүгө болот.



22-сүрөт

$\sin x$ функциясынын бул графиги синусоида деп аталат.

Бул графикке байкоо жүргүзсөк, биз мурда окуп үйрөнгөн $\sin x$ функциясынын касиеттеринин орундалгандыгын көрөбүз.

1. *$y = \sin x$ функцияларнын маанилеринин областы D=R.*
2. *$y = \sin x$ функцияларынын маанилеринин областы $[-1; 1]$ кесиндиси.*

Аргумент $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ болгондо, функция 1 ге барабар эң чоң маанини алат, ал эми $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ болгондо, функция -1ге барабар эң кичине маанини алат.

3. $y = \sin x$ *функциясы так функция.*

4. $y = \sin x$ *функциясы мезгили* 2π *болгон мезгилдүү функция.*

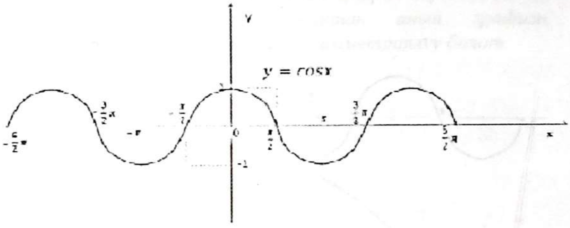
5. Функция $2n\pi < x < \pi + 2n\pi$ *интеральда оң маанилерди,* $\pi + 2n\pi < x < 2\pi + 2n\pi$ *интервалында терс маанилерди алат. Аргументтин* $x = n\pi$ *маанилеринде функция нөлгө айланат.*

Аргумент x *тин* $0; \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ *маанилери* $y = \sin x$ *функциясынын нөлдөрү деп аталат.*

6. $y=\sin x$ *функциясы* $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ *интервалында өсөт, ал эми* $\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ *интервалында кемийт.*

$y = \cos x$ *функциясынын графигин жогорудагыдай эле, ыкма менен түзөбүз.* $\cos x$ *функциясы жуп болгондуктан, анын графиги ордината огуна карата симметриялуу болот.*

Бул график косинусоида деп аталат. Ал $\cos x$ *функциясынын*



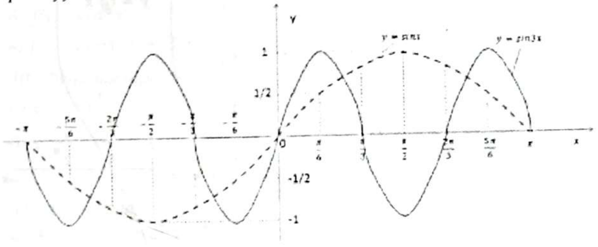
23-сүрөт

графиги.

График боюнча $\cos x$ *функциясынын касиеттерин өз алдыңарча талдап чыккыла.*

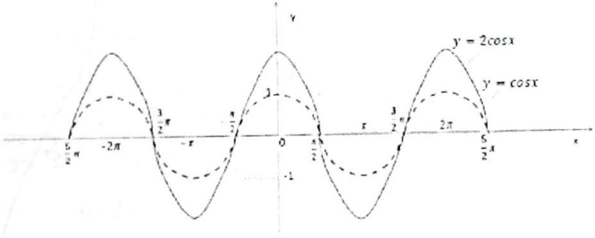
1-мисал. $y = \sin 3x$ *функциясынын графигин түзгүлө.*

Чыгаруу: $y=sin3x$ *функциясынын графиги* $y = sinx$ *функциясынын графигин абсцисса огу боюнча үч эсе кысуу аркылуу алынат.*



24-сүрөт

2-*мисал.* $y = 2cosx$ *функциясынын графигин түзгүлө.*
Чыгаруу: $y=2cosx$ *функциясынын графигин түзүү үчүн* $y=cosx$ *функциясынын графигин ордината огу боюнча 2 эсе чоюу керек.*

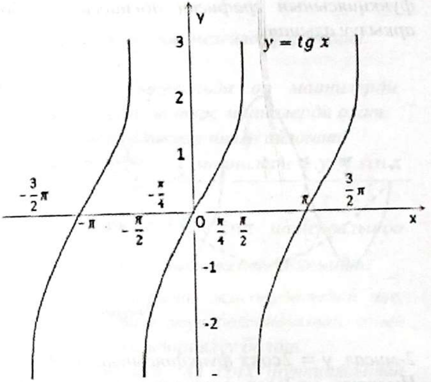


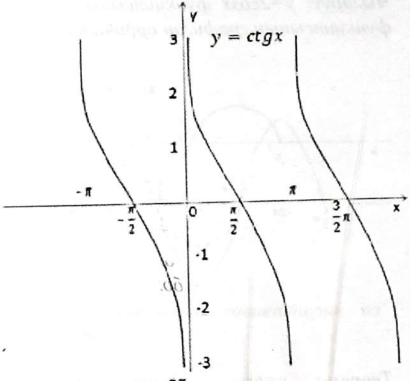
25-сүрөт

Теорема. $y=tgx$ *функциясынын аныкталуу областы* $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\quad n \in z$, *ал эми* $y = ctg\ x$ *функциясынын аныкталуу областы* $x \neq \pi n,\ n \in z$ *болгон чыныгы сандардын көптүгү болот.*

Ушул теореманын жана $tg\,x$ менен $ctg\,x$ тин касиеттерин билдирген теоремаларды эске алуу менен $tg\,x$ жана $ctg\,x$ функцияларынын графигин түзөбүз.

$y = tg\,x$ *функциясынын графигин түзөлү* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ *аралыгынан* $0(0,0)$, $A_1\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$, $A_2\left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$ *чекиттерин алып аларды координаттык тегиздикте белгилейли, аларды туташ жылма сызык менен туташ-тырабыз.* $y = tg\,x$ *функциясынын так экендигин эске алып, координаталар башталышына карата симметриялуу болгон график чийебиз.* $tg\,x$ *функциясынын мезгилдүүлүгүн эске алып бүткүл сан огунда график чийүүгө болот. Бул график* *<u>тангенсоида</u>* *деп аталат (26-сүрөт). Ушундай эле жол менен* $y = ctgx$ *функциясынын графигин түзөбүз. Ал* *<u>котангенсоида</u>* *деп аталат (27-сүрөт).*





27-сүрөт

1.9.-1.10. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

29. *Төмөнкү функциялардын жуп же так экендигин аныктагыла.*

а) $f(x)=\cos^5 x$; *г)* $f(x)=\cos^7 x+\sin^3 x$;

б) $f(x)=\sin^6 x$; *д)* $f(x)=x^4+tg^2 x+x\sin x$;

в) $f(x)=2\cos^5 x+3\sin^4 x$; *е)* $y=\frac{tgx-ctgx}{|x|}$.

30. *Функциялардын ар биринин эң кичине оң мезгилин тапкыла.*

а) $y=2\sin\frac{x}{3}$; *г)* $y=\sin 2x-\cos 3x+\sin 3x\cdot\cos 2x$;

б) $y=\frac{1}{3}\cos 6x$; *д)* $y=\cos^2 x-\sin^2 x$;

в) $y=5tg2x$; *е)* $y=3ctg\frac{x}{2}$.

31. *Эсептегиле.*

а) $4\cdot\sin 90^0+\cos 240^0$; *г)* $\cos(-30^0)\cdot tg(-60^0)$;

б) $\sin(-45^0)-\cos(-60^0)$; *д)* $\sin 390^0\cdot\cos 420^0$;

в) $3ctg210^0+2$; *е)* $\cos 1140^0\cdot ctg(-45^0)$.

32. *Функциялардын аныкталуу областын жана маанилеринин областын тапкыла.*

а) $y=3+\cos x$; *в)* $y=-\frac{1}{2}tg\,x$;

б) $y=2\sin x-1$; г) $y=-2{,}5\cos x$.

1.11. Сан аргументтүү тескери тригонометриялык функциялар.

Теорема. *f функциясы J аралыгында өсүүчү (же кемүүчү), ал эми а саны f функциясынын бул аралыкта ала турган маанилеринин каалаганы болсун. Анда* $f(x)=a$ *теңдемеси J аралыгында жалгыз тамырга ээ болот.*

Арксинус.

sinx функциясы $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *кесиндисинде өсөт жана* $[-1,1]$ *маанилерин алат. Жогорудагы тамыр жөнүндөгү теорема боюнча* $|a|\le 1$ *болгон ар кандай а саны үчүн* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *аралыгында* $\sin x=a$ *теңдемесинин b тамыры болот.*

Бул b саны а санынын арксинусу деп аталат.

Аныктама.

а санынын арксинусу деп $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *кесиндисинен алынган, синусу а га барабар санды айтабыз.*

***arcsin*α** *деп белгиленет.*

1-мисал. $arcsin\frac{1}{2}$ *ди тапкыла.*

Чыгаруу: $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *кесиндисинин кайсы бурчтун синусу* $\frac{1}{2}$ *ге барабар боло тургандыгын таблицадан табабыз.*

$arc\sin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ *болот.* $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Аныктама.

α санынын арккосинусу деп $[0;\pi]$ *кесиндисинен алынган жана косинусу α га барабар болгон санды айтабыз.*

$\boldsymbol{arccos\,\alpha}$ *деп белгиленет.*

2-мисал. $arccos\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ *жана* $arccos\frac{1}{2}$ *ди тапкыла.*

Чыгаруу: $[0;\pi]$ *кесиндисинен табабыз* $arc\cos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; $arc\cos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$;

Аныктама.

а санынын арктангенси деп $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ *интервалынан алынган жана тангенси а га барабар болгон санды айтабыз.*

$\boldsymbol{arc\,tg\,a}$ *деп белгиленет.*

3 – мисал. $ars\,tg\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$; *болот.*

Аныктама.

а санынын арк котангенси деп $(0;\pi)$ *интервалынан алынган жана котангенси а га барабар болгон санды айтабыз.*

$\boldsymbol{ars\,ctg\,a}$ *деп белгиленет.*

4-мисал. $arc\,ctg\,(-1)$ *жана* $arc\,ctg\,(\frac{1}{\sqrt{3})})$ *ти тапкыла.*

Чыгаруу: $arc\,ctg\,(-1)=\frac{3\pi}{4}$; *анткени* $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$.

$arc\,ctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{3},\quad \frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$

1.11. ***Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.***

33. t нын көрсөтүлгөн аралыкта маанисин тапкыла.

а) $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; *д)* $tg\,t=1,[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

б) $\sin t = -\frac{1}{2},\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; *е)* $tg\ t \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

в) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad [0;\pi]$; *ж)* $ctg\ t = (-\sqrt{3}), [0;\pi]$

г) $\cos t = 0,\quad [0;\pi]$; *з)*$ctg\ t = 1,\ [0;\ \pi]$.

34. Туюнтмалардын маанилерин тапкыла.

а) $\arcsin 0 + \arcsin\frac{1}{2}$; *д)* $arc\ tg(-\sqrt{3}) - arc\ tg 0$;

б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \arccos 0$; *е)* $arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) + arc\cos\frac{1}{2}$;

в) $\arccos(-1) + arctg 1$; *ж)*$\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + arcctg\sqrt{3}$;

г) $arcctg 0 - arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2}$; *з)* $arctg(-1) - arc\sin 1$.

35. Төмөнкү функциялардын аныкталуу областарын тапкыла.

а) $y = arc\sin(x-2)$ *б)* $y = arc\sin(\cos x)$

36. Төмөнкү туюнтмаларды эсептегиле.

а) $\sin(2\arcsin\frac{1}{3})$; *г)* $tg(2arc\ tg\ 3)$;

б) $\cos(2\arcsin\frac{1}{3})$; *д)* $\sin(3\arcsin\frac{1}{3})$;

в) $tg(2\arcsin\frac{1}{3})$; *е)* $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{12}{13}$.

1.12. Тригонометриялык теңдемелер.

Аныктама.

Белгисизи тригонометриялык функциялардын аргументи болгон теңдемелерди тригонометриялык теңдеме дейбиз.

$\sin x = \alpha$ *теңдемеси. (1)*

$\sin x = \alpha$ *теңдемеси* $|\alpha| > 1$ *болгондо чыгарылышка ээ болбойт.*

$|\alpha| \le 1$ *болгондо (1) теңдеме* $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ *кесиндисинде*

$x_1 = \arcsin\alpha + 2\pi n$, *ал эми* $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ *кесиндисинде*

$x_2 = \pi - \arcsin\alpha + 2\pi n$ *чыгарылыштарына ээ болот.*

Бул чыгарылыштардын эки формуласын төмөнкүдөй бир формула менен жазуу ыңгайлуу.

$\boxed{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \epsilon z.}$ *(2)*

$a = 1,\ a = -1$ *жана* $a = 0$ *болгондо чыгарылыштардын төмөнкүдөй жазылышы кабыл алынган.*

$$\boxed{sinx=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\epsilon z.}\quad (3)$$

$$\boxed{sinx=-1,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\epsilon z.}\quad (4)$$

$$\boxed{sinx=0,\ x=\pi n, n\epsilon z}\quad (5).$$

1-мисал. Төмөнкү теңдемелерди чыгаргыла.

а) $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *в)* $sin2x = -1$;

б) $sin\frac{x}{2} = 1$; *г)*$sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$.

Чыгаруу:

а) $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$, *(2) формуланы пайдаланабыз*

$x = (-1)^k arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k$,

$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k\epsilon z$.

б) $sin\frac{x}{2} = 1$, *(3) формуланы пайдаланабыз*

$\frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, *(2 ге көбөйтөбүз)*

$x = \pi + 4\pi n,\ n\epsilon z$.

в) $sin\left(\frac{x}{2}\right)^{2x} = 1$, *(4) формуланы пайдаланабыз*

$2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\epsilon z$, *(2 ге бөлөбүз)*

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\epsilon z$.

г) $sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$ *(5) формуланы колдонобуз*

$3x - \frac{\pi}{5} = \pi n,\ n\epsilon z$

$3x = \frac{\pi}{5} + \pi n$, *(3 кө бөлөбүз)*

$x = \frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{3},\ n\epsilon z$.

<u>$cosx = \alpha$ *теңдемеси.*</u> *(6)*

$cosx = \alpha$ *теңдемеси* $|\alpha| > 1$ *болсо, чыгарылышка ээ болбойт.* $|\alpha| \leq 1$ *болгондо* $cosx = \alpha$ *теңдемеси узундугу* 2π *болгон* $[-\pi; \pi]$ *кесиндисинде эки чыгарылышка ээ болот.*

$$x = \pm arccos\alpha.$$

(6) теңдеменин бардык тамырларынын формуласы

$\boxed{x = \pm arccos\alpha + 2\pi n, n, \in, z.}$ *(7)болот.*

$a = 1$, $a = -1$ *жана* $a=0$ *болгондо (6) теңдеменин чыгарылыштары төмөндөгүдөй формада жазуу кабыл алынган.*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos x = 1, & x = 2\pi n, \quad n \in Z. \\ \cos x = -1, & x = \pi + 2\pi n, n \in Z \\ \cos x = 0, & x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z \end{array}} \qquad (8)$$

2-мисал. Тригонометриялык теңдемелерди чыгаргыла.

а) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$;

б) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos 3x = 0$.

Чыгаруу:

а) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *(7) формуланы пайдаланабыз.*

$2x = \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n$,

$2x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$,

$x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi n, \quad n \in Z$.

б) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = \pm \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n$,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

в) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$,

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$,

$x = \frac{2\pi}{3} \pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi n, \quad n \in Z$.

г) $\cos 3x = 0$ (8) *формуланы колдонобуз.*

$3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$,

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z$.

$tg\, x = a$ *жана* $ctg\, x = a$ *теңдемелери.*

$tg\, x = a$ *теңдемесинин жалпы чыгарышылынын формуласы*

$$\boxed{x = arc\, tg\, a + \pi n, \quad n \in Z} \quad (9)$$

$ctg\, x = a$ *теңдемесинин жалпы чыгарылышынын формуласы*

$$\boxed{x = arc\, ctg\, a + \pi n, \quad n \in Z} \quad (10)$$

3-мисал. Теңдемелерди чыгаргыла.

а) $tg2x = \sqrt{3}$; *б)* $tg\frac{x}{3} = 5$;

в) $ctg\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$; *г)* $3ctg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Чыгаруу:

а) $tg2x = \sqrt{3}$ *(9) формуланы пайдаланабыз*

$2x = arctg\sqrt{3} + \pi n,$

$2x = \frac{\pi}{3} + \pi n,$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in z.$

б) $tg\frac{x}{3} = 5$

$\frac{x}{3} = arctg5 + \pi n,$

$x = 3arctg5 + 3\pi n,\ n\epsilon z.$

в) $ctg\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

$3x - \frac{\pi}{5} = arcctg1 + \pi n,$

$3x = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{4} + \pi n,$

$x = \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}.$

г) $3ctg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

$ctg\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3} = arcctg\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n, \frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n$

$x = \pi + \pi + 3\pi n,\ n\epsilon z.$

1.13. Тригонометриялык теңдемелерди жана теңдемелер системаларын чыгаруу.

Ар кандай тригонометриялык теңдемелерди чыгаруу үчүн аны тең күчтүү теңдемелерге алмаштырып өзгөртүп *түзүү менен жөнөкөй тригонометриялык теңдемелерге келтиребиз.*

Алгебралык теңдемелерди чыгарууда колдонулган бардык ыкмалар: ордуна коюу, жаңы белгисизди кийирүү, көбөйтүүчүлөргө ажыратуу ыкмалары тригонометриялык теңдемелерди чыгарууда да колдонулат.

Тригонометриялык теңдемедеги бир эле аргументтин ар түрдүү функциялардын бир аттуу функцияга келтиребиз. Өзгөртүп түзүүдө тригонометриялык формулаларды, теңдештиктерди өз орду менен пайдалануу зарыл.

1-мисал. Тригонометриялык теңдемелерди чыгаргыла.

а) $2\cos(2x-3)=\sqrt{3}$; *в)* $2\cos^2 x=1$;

б) $\sin x^2=1$; *г)* $\cos^2(3x-60^0)=0{,}75$.

Чыгаруу:

а) $2\cos(2x-3)=\sqrt{3}$ *Теңдеменин эки жагын тең 2 ге*

$\cos(2x-3)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *бөлөбүз.*

$2x-3)=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n$, *cosx тин* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *барабар маанисин*

$2x=3\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, *таблицадан табабыз.*

$x=\frac{3}{2}\pm\frac{\pi}{12}-\pi n,\ n\epsilon z$

б) $\sin x^2=1$ *sinx тин 1 ге барабар манисин таблицадан*

$x^2=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, *табабыз.*

$x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n},\ n\epsilon z.$

Жообу: $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n};\ x=-\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}.\ n\epsilon z.$

в) $2\cos^2 x=1$ *Теңдеменин эки жагын тең 2 ге бөлүп,*

$\cos^2 x=\frac{1}{2}$ *андан кийин квадрат тамыр чыгарабыз*

$\cos x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n$

$x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n,\ x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon z.$

$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\epsilon z.$

Жообу: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n\epsilon z, x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n\epsilon z.$

г) $cos^2(3x - 60^0) = 0{,}75,$

$$cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = \pm arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,$$

$$3x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{9} \pm \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in z.$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = \pm arc\,cos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\pi n$$

$$3x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{9} \pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n\epsilon z.$$

Жообу: $x = \frac{\pi}{9} \pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n\epsilon z;\ x = \frac{\pi}{9} \pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n\epsilon z.$

2-мисал. Теңдемелерди чыгаргыла.

а) $sinx + 2cosx = 1;$ *в)* $tg2x - ctg3x = 0;$

б) $sin2x = (cosx - sinx)^2;$ *г)* $cos\frac{x}{2} + cosx + cos2x = 0.$

Чыгаруу: *а)* $sinx + 2cosx = 1$, *бул теңдемени чыгарууда* $sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2x}$; $cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ *теңдештиктерин пайдаланабыз.* $tg\frac{x}{2} =$ *и жаңы өзгөрмөсүн кииребиз.*

$$sinx = \frac{2u}{1-u^2};\quad cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Берилген теңдеме төмөндөгүдөй түргө келет.

$$\frac{2u}{1+u^2} + \frac{2(1-u^2)}{1+u^2} - 1 = 0,$$ *теңдеменин эки жагын тең*

$2u + 2 - 2u^2 - 1 - u^2 = 0.$ $1 + u^2$ *ка көбөйтөбүз*

$3u^2 - 2u - 1 = 0.$

$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16$

$u_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{16}}{6} = \frac{2\pm4}{6};\ u_1 = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1,$

$$u_2 = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{3} = -\frac{1}{3},$$

U нун маанилерин $tg\frac{x}{2} = u$ *формуласын коёбуз.*

$tg\frac{x}{2} = 1$ $\qquad$ $tg\frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$ $\qquad$ $\frac{x}{2} = arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n,$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon z.$ $\quad x = 2arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n\epsilon z$

Жообу: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n\epsilon z\ \ x = 2arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n\epsilon z.$

Чыгаруу: *б)* $sin2x = (cosx - sinx)^2$;

$sin2x = cos^2x - 2cosxsinx + sin^2x,$

$cos^2x + sin^2x = 1,$ $\quad 2cosxsinx = sin2x$ *формулаларын эске алсак, берилген теңдеме төмөндөгүдөй түргө келет.*

$sin2x = 1 - sin2x,$

$2sin2x = 1,$

$sin2x = \frac{1}{2}, 2x = (-1)^k arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k\epsilon z$

$2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,$

$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k\epsilon z.$

Жообу: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k\epsilon z.$

Чыгаруу:

в) $tg2x - ctg3x = 0,$ $\quad tgx = \frac{sinx}{cosx}, ctgx = \frac{cosx}{sinx}$

$\frac{sin2x}{cos2x} - \frac{cos3x}{sin3x} = 0,$ $\quad$ *теңдештиктерин жана*

$\frac{sin2x \cdot sin3x - cos2x \cdot cos3x}{cos2x \cdot sin3x} = 0;$ $\quad cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta$

$\frac{-cos(2x+3x)}{cos2xsin3x} = 0,$ $\quad$ *теңдештиктерин пайдаланабыз.*

$cos5x = 0,$ $\quad cos2x \cdot sin3x \neq 0$ *шарты менен*

$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $\quad$ *теңдеменин эки жагын тең*

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n\epsilon z.$ $\quad - cos2x \cdot sin3x$ *ке көбөйтөбүз.*

Жообу: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n\epsilon z.$

г) **Чыгаруу:** $cos\frac{x}{2} + cosx + cos2x = 0.$

Бул теңдемени чыгарууда $cosx + cos2x$ *суммасын* $cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ *формуласын колдонуп көбөйтүндүгө өзгөртүп түзөбүз.*

$cos\frac{x}{2} + 2cos\frac{3}{2}x \cdot cos\frac{x}{2} = 0,$

$cos\frac{x}{2}\left(1 + 2cos\frac{3}{2}x\right) = 0.$

$cos\frac{x}{2} = 0,$ $\quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $\quad x = \pi + 2\pi n,$ $\quad 1 + 2cos\frac{3}{2}x = 0,$

$cos\frac{3}{2}x = -\frac{1}{2},$ $\quad \frac{3}{2}x = \pm arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,$

$$\frac{3}{2}x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$
$$x = \pm\frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi n}{3},$$
Жообу: $\frac{3}{2}x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon z, \quad x = \pm\frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi n}{3}, n\epsilon z.$

3-мисал. Теңдемелерди чыгаргыла.

а) $cos2x - 5sinx - 3 = 0,$

б) $tg2x - 2ctg2x + 1 = 0,$

в)$sin5x + sinx + 2sin^2x = 1,$

г) $sin3x = cos2x \cdot sin3x,$

Чыгаруу:

а) $cos2x - 5sinx - 3 = 0, \quad cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$ *формуласын колдонобуз.*

$1 - 2sin^2x - 5sinx - 3 = 0,$

$2sin^2x + 5sinx + 2 = 0,$

$sinx = t$ *жаңы өзгөрмөсүн киийребиз*

$2t^2 + 5t + 2 = 0. \ D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9,$

$t_{1/2} = \frac{-5\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{-5\pm3}{4}; \ t_1 = -\frac{1}{2}; \ t_2 = -2;$

$sinx = -\frac{1}{2},$ $\quad sinx = -2$ *теңдемесинин чыгарлыиы жок.*

$x = (-1)^k \, arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,$

$x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k,$

Жообу: $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k.$

Чыгаруу: *б)* $tg2x - 2ctg2x + 1 = 0$

$tg2x - \frac{2}{tg2x} + 1 = 0. \ \ ctgx = \frac{1}{tgx}$ *теңдештигин пайдаландык*

$tg^2 2x - 2 + tg2x = 0 \ \ t = tg2x$

$t^2 + t - 2 = 0, \qquad D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$

$t_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2}, \quad t_1 = 1, t_2 = -2.$

$tgx = 1, \qquad tgx = -2$

$x = arctg1 + \pi n. n\epsilon z \ \ x = arctg(-2) + \pi n, \ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$

Жообу: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n\epsilon z. \ x = arctg(-2) + \pi n.$

Чыгаруу: *в)* $sin5x + sinx + 2sin^2x = 1$

$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ *жана* $cos^2\alpha - sin^2\alpha = cos2\alpha$

$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ *формулаларын колдонобуз.*

$sin3x \cdot cos2x + 2sin^2x - sin^2x - cos^2x = 0,$
$2sin3x\, cos2x + sin^2x - cos^2x = 0,$
$2sin3x\, cos2x - cos2x = 0,$
$cos2x(2sin\,3x - 1) = 0,$

$cos2x = 0, \qquad 2sin3x - 1 = 0,$
$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon z, \qquad sin3x = \frac{1}{2},$
$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n\epsilon z, \qquad 3x = (-1)^k arcsin\frac{1}{2} + \pi k,$
$3x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,$
$x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3},$

Жообу: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n\epsilon z; \qquad x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}.$

г) $sin3x = cos2x \cdot sin3x,$
$sin3x - cos2xsin3x = 0,$
$sin3x(1 - cos2x) = 0,$
$sin3x = 0, \qquad 1 - cos2x = 0,$
$3x = \pi n, n\epsilon z, \qquad cos2x = 1,$
$x = \frac{\pi n}{3}, n\epsilon z, \qquad 2x = 2\pi n,$
$x = \pi n, n\epsilon z.$

Жообу: $x = \frac{\pi n}{3}, n\epsilon z,\ x = \pi n, n\epsilon z.$

4-мисал. Тригонометриялык теңдемелердин системаларын чыгаргыла.

а) $\begin{cases} x + y = \pi \\ cosx - cosy = 1 \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} sinx \cdot cosy = 0{,}25 \\ siny \cdot cosx = 0{,}75 \end{cases}$

б) $\begin{cases} cos\frac{x+y}{2} \cdot cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ cosx \cdot cosy = \frac{1}{4} \end{cases}$ *г)* $\begin{cases} sinx + cosy = 1 \\ sin^2x - cos^2y = 1 \end{cases}$

Чыгаруу: а) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ cosx - cosy = 1, \end{cases} \begin{cases} x = \pi - y, \\ cosx - cosy = 1, \end{cases}$

$cos(\pi - y) - cosy = 1,$
$-cosy - cosy = 1,$
$-2cosy = 1,$
$$cosy = -\frac{1}{2}$$

$y = \pm arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n\epsilon z;$

$y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$
$x = \pi - \left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)\ n\epsilon z.$

Жообу: $y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon z, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon z.$

Чыгаруу: *б)* $\begin{cases} \cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ \cos x\cdot\cos y = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$ *формуласын пайдаланып, системанын биринчи теңдемесин өзгөртүп түзөбүз.*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\cos x + \cos y) = \frac{1}{2}, \\ \cos x\cdot\cos y = \frac{1}{4}, \end{cases} \begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos x\cdot\cos y = \frac{1}{4}, \end{cases} \begin{cases} \cos y = 1 - \cos x, \\ (1-\cos x)\cdot\cos x = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

$$\cos x - \cos^2 x = \frac{1}{4},$$
$$4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$$

$\cos x = t.$
$4t^2 - 4t + 1 = 0$
$D = 16 - 4\cdot 4\cdot 1 = 0$
Демек, $t_{1/2} = \frac{4}{2\cdot 4} = \frac{1}{2}$
$\cos x = \frac{1}{2},\ x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$
$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$
$\cos y = 1 - \cos x$
$\cos y = \frac{1}{2}$, *демек* $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$

Жообу: $y = \pm\frac{\pi}{3} - 2\pi n,\qquad y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon z.$

Чыгаруу: *в)* $\begin{cases} \sin x\cdot\cos y = 0{,}25 \\ \sin y\cdot\cos x = 0{,}75 \end{cases}$ *биринчи теңдеме менен экинчи теңдемени мүчөлөп кошобуз*

$$\begin{cases} \sin x\cdot\cos y + \cos x\sin y = 1, \\ \cos x\cdot\sin y = 0{,}75, \end{cases} \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \cos x\cdot\sin y = 0{,}75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \cos x\cdot\sin y = 0{,}75, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y, \\ \sin y\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{3}{4}, \end{cases}$$

$$sin^2y = \frac{3}{4}$$

$$siny = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$siny_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad y_1 = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k\epsilon z.$

$siny_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad y_2 = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k,\ k\epsilon z.$

$x_1 = \frac{\pi}{2} - (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k\epsilon z.$

$x_2 = \frac{\pi}{2} - (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k,\ k\epsilon z.$

Чыгаруу: *г)* $\begin{cases} sinx + cosy = 1 \\ sin^2x - cos^2y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} sinx = 1 - cosy \\ (1 - cosy)^2 - cos^2y = 1 \end{cases}$

$1 - 2cosy + cos^2y - cos^2y = 1, \qquad -2cosy = 0, \qquad cosy = 0,$

$y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon z,$

$sinx = 1 - cos\frac{\pi}{2},$

$sinx = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon z.$

Жообу: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon z; \qquad y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon z.$

5-мисал. Төмөнкү тескери тригонометриялык теңдемелерди чыгаргыла.

а) $2\, arcsin(x^2 - 5x + 6{,}5) = \frac{\pi}{3};$

б) $arctg(x + 3) - arctg(x + 2) = \frac{\pi}{4};$

в) $arcsin5x = arccos\sqrt{24}x;$

г) $2arctg\frac{1}{2} - arctgx = \frac{\pi}{4}.$

Чыгаруу: *а)* $2\, arcsin(x^2 - 5x + 6{,}5) = \frac{\pi}{3}$ *(2ге бөлөбүз)*

Теңдеменин эки жагын тең синус аркылуу туюнтабыз.

$sin(arcsin(x^2 - 5x + 6{,}5) = sin\frac{\pi}{6},$

$x^2 - 5x + 6{,}5 = 0{,}5,$

$x^2 - 5x + 6 = 0,$

$D = 25 - 4\cdot 6 = 1,$

$x_{1/2} = \frac{5\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{5\pm1}{2},\ x_1 = \frac{5+1}{2} = 3;\ \ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$

Жообу: $x_1 = 3;\ x_2 = 2.$

Чыгаруу: *б)* $arctg(x+3) - arctg(x+2) = \frac{\pi}{4}$

Теңдеменин эки жагын тең тангенс аркылуу туюнтабыз жана $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\alpha}$ *формуласы – жардамы менен теңдемени өзгөртүп түзөбүз.*

$tg\big(arctg(x+3) - arctg(x+2)\big) = tg\frac{\pi}{4}$,

$\frac{tg(arctg(+3) - tg(arctg(x+2)}{1 + tg\big(arctg(x+3)\big)\, tg\big(arctg(x+2)\big)} = 1$,

$tg(arctgx) = x$ *барабардыгынын негизинде төмөнкүгө ээ болобуз.*

$\frac{x+3-(x+2)}{1+(x+3)(x+2)} = 1$,

$\frac{1}{1+x^2+5x+6} = 1$, $\quad x^2 + 5x + 7$*ге теңдеменин эки жагын тең көбөйтөбүз.*

$x^2 + 5x + 6 = 0$ *теңдемесин алабыз.*

$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$,

$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$, $x_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$; $x_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$

Жообу: $x_1 = -2, x_2 = -3$.

Чыгаруу: *в)* $arcsin5x = arccos\sqrt{24}x$

Теңдеменин эки жагын тең синус аркылуу туюнтабыз.

$sin(arcsin5x) = sin(arccos\sqrt{24}x)$

$sin(arcsinx) = x$ *жана* $sin\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$ *теңдештиктеринин негизинде теңдемени өзгөртүп түзөбүз.*

$5x = \pm\sqrt{1 - cos^2(arccos\sqrt{24}x)}$.

$5x = \pm\sqrt{1 - (\sqrt{24}x)^2}$ *бул теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.*

$$25x^2 = 1 - 24x^2$$

$$25x^2 + 24x^2 = 1$$

$$49x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{49};\ x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{49}};\ x_1 = \frac{1}{7};\ x_2 = -\frac{1}{7}$$

Жообу: $x_1 = \frac{1}{7}$, $x_2 = -\frac{1}{7}$

г) ***Чыгаруу:*** $2arctg\frac{1}{2} - arctgx = \frac{\pi}{4}$, *Тангенс аркылуу туюнтуп алабыз.*

$$tg\left(2arctg\frac{1}{2} - arctgx\right) = tg\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{tg\left(2arctg\frac{1}{2}\right) - tg(arctgx)}{1 - tg\left(2arctg\frac{1}{2}\right)\cdot tg(arctgx)} = 1$$

$tg(arctgx) = x$, *теңдештигин пайдаланабыз.*

$$tg\left(2arctg\frac{1}{2}\right) = \frac{2tg(arctg\frac{1}{2})}{1 - tg^2(arctg\frac{1}{2})} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Демек, жогорку теңдеме төмөндөгүдөй болот.

$$\frac{\frac{4}{3} - x}{1 - \frac{4}{3}\cdot x} = 1, \quad \frac{\frac{4-3x}{3}}{\frac{3-4x}{3}} = 1, \quad \frac{4-3x}{3-4x} = 1$$

$$4 - 3x = 3 - 4x$$

$$-3x + 4x = 3 - 4$$

$$x = -1.$$

Жообу: $x = -1.$

1.12-1.13. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

37. Теңдемелерди чыгаргыла.

а) $2cos + \sqrt{3} = 0$; *г)* $2cos2x + 3 = 4$;

б) $\sqrt{2}sin - 1 = 0$; *д)* $\sqrt{3}tgx - 1 = 0$;

в) $sin3x + 5 = 6$; *е)* $2\sqrt{3}ctgx - 1 = 1$.

38. Тригонометриялык теңдемелерди чыгаргыла.

а) $sin\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *в)* $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}\right) = \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3}\left(tg\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 1$; *г)* $3ctg\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sqrt{3}$

39. Теңдемелерди чыгаргыла.

а) $sin5x \cdot cosx - cos5x \cdot sinx = \frac{1}{2}$

б) $sin^2x - 4sinx + 3 = 0$

в) $6cos^2x + cosx - 1 = 0$

г) $cos^2x - 4sinx - 4 = 0$

д) $2ctg^2x + 3ctgx = 2$

е) $3cos^2x - 5cosx\,sinx + 2sin^2x = 0$

ж) $4sin^2x - sin2x = 3$

з) $\sqrt{3}sin^2x = \frac{1}{2}sin2x$

и) $\cos^4\frac{x}{3}-\sin^4\frac{x}{3}-\sin^2\frac{x}{3}-\cos^2\frac{x}{3}=0$

к) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$

40. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

а) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ 2\sin x\ \mathrm{si}y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ *в)* $\begin{cases} 3^{\sin x+\cos y}=1, \\ 9^{\sin^2 x+\cos^2 y}=3,\end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x-\cos y=0 \\ 4\sin x\cdot\cos y=1\end{cases}$ *г)* $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ tgx+tgy=1\end{cases}$

41. Тескери тригонометриялык теңдемелерди чыгаргыла.

а) $2arctg(x^2+x-1)=\frac{\pi}{2}$

б) $2\arcsin(x^2-7x+13)=\pi$

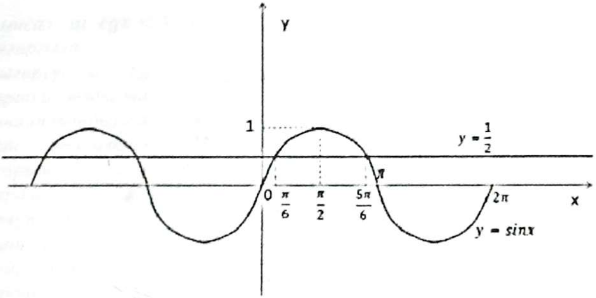
1.14. Тригонометриялык барабарсыздыктарды чыгаруу.

Тригонометриялык барабарсыздыктарды чыгарууда сан айланасын же тригонометриялык функциялардын графиктерин колдонуу ыңгайлуу.

Аларды чыгаруунун жолдорун мисалдарда карап көрөлү.

1-мисал. *а)* $\sin x>\frac{1}{2}$, *б)* $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ *барабарсыздыктарын чыгаргыла.*

Чыгаруу: $y=\sin x$ *жана* $y=\frac{1}{2}$ *функцияларынын графиктерин түзөбүз.*



28-сүрөт

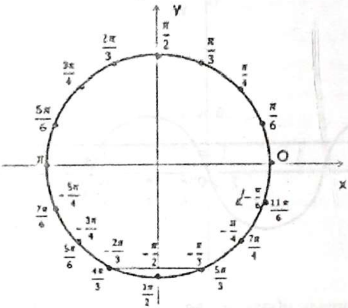
Графиктердин кесилишкен чекиттеринин абсциссаларын табабыз. Натыйжада $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ интервалын алабыз. Бул интервалдагы x тин маанилери $sinx > \frac{1}{2}$ барабарсыздыгын канаттандырат. Барабарсыздык чыгарылыштарын төмөндөгүдөй белгилейбиз.

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$; *Синустун мезгили 2π болгондуктан, калган чыгарылыштар табылган чыгарылыштарга $2\pi n, n\epsilon z$ түрүндөгү сандарды кошуу аркылуу алынат.*

Берилген барабарсыздыктын толук чыгарылышы.

$$2\pi n + \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon z \text{ түрүндө болот.}$$

б) Чыгаруу: $sinx < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ бул барабардыкты чыгарууда сан айланасын пайдаланабыз. Бул сан айланасында оң багыттагы бурчтар көрсөтүлгөн. $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ түз сыгынын сан айланасы менен кесилишкен чекиттердин обсциссаларынан $(\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3})$ интервалын алабыз. Демек $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$, $2\pi n + \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, барабарсыздыктын чыгарылышы болот.



29-сүрөт

2-мисал. Барабарсыздыктарды чыгаргыла.

а) $cosx < \frac{\sqrt{2}}{2}$ *б)*$cosx > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

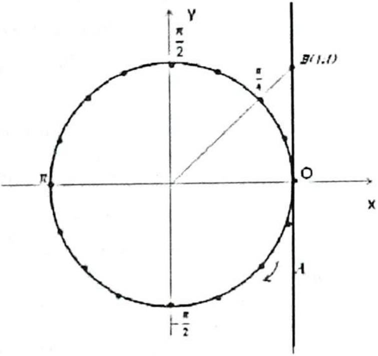
Чыгаруу: а) $cosx < \frac{\sqrt{2}}{2}$, *сан айланасынын абсциссалары* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *ден кичине чекиттери* $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *түз сызыгынын сол жагында жатышат* $arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ *экендиги белгилүү. 29-сүрөттөгү сан айланасынан* $\frac{\pi}{4}$ *төн* $\frac{7\pi}{4}$ *кө чейинки жаасындагы бурчтар башкача айтканда* $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ *интервалы барабарсыздыктын* $[0,2\pi]$ *кесиндисиндеги чыгарылышынтары болот.* $cosx$ *тин мезгили* $2\pi n$ *болгондуктан* $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$ *чыгарылыштын жообу болот.*

б) $cosx > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *бул барабарсыздыктын чыгарылышы 29-сүрөттөгү сан айланасы боюнча* $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *түзүнүн оң жагындагы чекиттер болот. башкача айтканда* $-\frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n\epsilon z$ *чыгарылыштын жообу болот.*

3-мисал. а) $tgx < 1$ *жана б)* $tgx \geq -\sqrt{3}$ *барабарсыздыктарын чыгаргыла.*

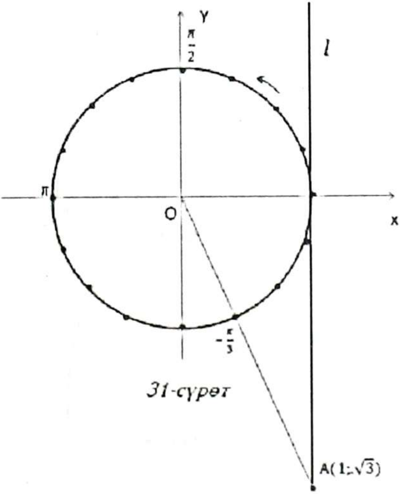
Чыгаруу: *а)* $tgx < 1$ *барабарсыздыгын канааттандырган* x *тин маанилерин оң жарым айлананын бардык чекиттеринен бөлүп алуу үчүн тангенстер сызыгына кайрылабыз. Ординатасы 1 ден кичине болгон чекиттер тангенстер сызыгындагы* BA *шооласында жатышат. (30-сүрөт)* $arctg1 = \frac{\pi}{4}$ *болгондуктан* x *тин маанилери* $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$ *шартын канааттандырат.*

Демек, тангенстин мезгилдүүлүгүн эске алсак, $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in z,$ *чыгарылышына ээ болобуз.*



30-сүрөт

б) Чыгаруу:
31-сүрөттө $tgx \geq -\sqrt{3}$ *барабарсыздыгын канааттандырган* x *тин маанилерин камтыган* l *жаасы көрсөтүлгөн.*



31-сүрөт

Демек, $-\frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{2}$, *Тангенстин мезгили* πn *болгондуктан*

$-\frac{\pi}{3} + \pi n \le x < \frac{\pi}{2} + \pi n,$

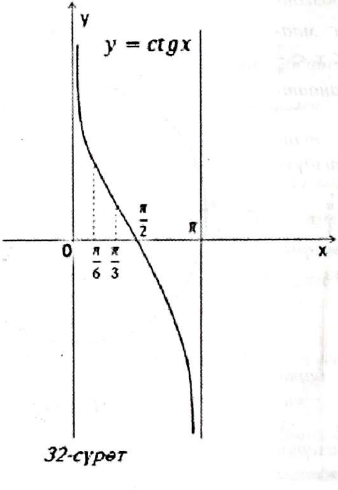
$n \epsilon z$ *барсыздыктын чыгарылышы болот.*

4-мисал. а) $ctgx \ge \sqrt{3}$; *б)* $ctgx \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ *барабарсыздыктарын чыгаргыла.*

Чыгаруу: *а)* $ctgx \ge \sqrt{3}$ *барабарсыздыгын чыгаруу үчүн* $y = ctgx$ *функциясынын графигине кайрлабыз. 32-сүрөт боюнча бул барабарсыздыктын чыгарылышы* $0 < x \le \frac{\pi}{6}$ *болот.* $ctgx$ *функциясынын мезгили* πn *ди эске алсак,* $\pi n < x \le \frac{\pi}{6} + \pi n, n\epsilon z$, *барабарсздыктын чыгарылышы болот.*

б) ***Чыгаруу:*** $ctgx \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, *32-сүрөттү карасаңар, бул барабарсыздыктын чыгарылышы* $\frac{\pi}{3} \le x < \pi$

$\frac{\pi}{3} + \pi n \le x < \pi + \pi n,$ $n\epsilon z$ *боло тургандыгын көрөсүңөр.*



32-сүрөт

1.14. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

42. *Барабарсыздыктарды чыгаргыла.*

а) $sin2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; *б)* $2sin(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{3}) > 1$;

в) $4sin3x \cdot cos3x \leq \sqrt{2}$; *г)* $2(sin\frac{\pi}{3} \cdot cosx + cos\frac{\pi}{3}sinx) \leq \sqrt{3}$.

43. *Барабарсыздыктарды чыгаргыла.*

а) $2cosx \geq 1$; *б)* $cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) < -\frac{1}{2}$;

в) $2cos2x - \sqrt{3} \leq 0$; *г)* $cos\frac{\pi}{4}cosx - sin\frac{\pi}{4}sinx \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

44. *Барабарсыздыктарды чыгаргыла.*

а) $\sqrt{3}tgx \geq 1$; *б)* $tg(\frac{\pi}{4}+3x) < \sqrt{3}$;

в) $3tg(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}) \leq \sqrt{3}$; *г)* $\sqrt{3}tg2x + 5 \geq 8$.

45. *Барабарсыздыктарды чыгаргыла.*

а) $3ctg2x - \sqrt{3} \leq 0$; *б)* $ctg\left(\frac{\pi}{6}+2x\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{3}ctg\frac{x}{3} \geq -1$; *г)* $ctg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \leq -\sqrt{3}$.

II глава. Анализдин башталышы. Функциянын предели жана үзгүлтүксүздүгү.
2.1. Пределдер.
Сан удаалаштыгынын предели.

Аныктама.

Натуралдык аргументтүү функциянын маанилеринин белгилүү тартипте (n дин өсүү тартибинде) алынган көптүгү, сан удаалаштыгы деп аталат жана төмөнкүдөй белгиленет:

$$x_1,\ x_2, \dots, x_n, \dots \text{ же кыскача } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

$x_n = f(n)$ *саны* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удаалаштыгынын жалпы мүчөсү, удаалаштыкты түзүшкөн сандар анын мүчөлөрү деп аталат.*

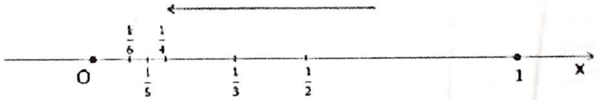
1-мисал. Жалпы мүчөсү $x_n = \frac{1}{n+1}$ *болгон удаалаштыкты жазгыла.*

Чыгаруу: Удаалаштык түзүү үчүн n *ге натуралдык маанилерди беребиз* $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{3};\ x_3 = \frac{1}{4}, \dots, x_n = \frac{1}{n+1}, \dots$

2-мисал. Жалпы мүчөсү $x_n = \frac{n-1}{n+1}$ *болгон удаалаштыкты жазгыла.*

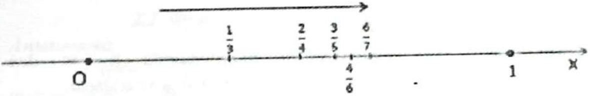
Чыгаруу: $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{2}{4}, x_4 = \frac{3}{5}, \dots$ *башкача айтканда.* $0; \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \dots$

Бул эки мисалдагы удаалаштыктардын мүчөлөрүнүн номерлери өсүшү менен, алардын жалпы мүчөлорүнүн башкача айтканда $x_n = f(n)$ *туюнтмаларынын маанилери кандайдыр бир* a *санына умтулушарын байкайбыз.*



33-сүрөт

1-мисалдагы удаалаштыктын мүчөлөрү n *дин мааниси өскөн сайын 0 гө умтулары 33-сүрөттөн көрүнүп турат.*



34-сүрөт

2-мисалдагы удаалаштыктын мүчөлөрү n дин мааниси өскөн сайын 1 ге умтулат. (34-сүрөт).
Демек, 1-удаалаштыктын предели 0 саны,
2-удаалаштыктын предели 1 саны болот.

Аныктама.

Ар кандай мурунтан берилген $\delta > 0$ саны үчүн $n > n_0$ болгондо $|x_n - a| < \delta$ барабарсыздыгы аткарылгандай n_0 натуралдык саны табылса, анда a саны $\{x_n\}$ удаалаштыгынын предели деп аталат жана
$lim_{n\to\infty} x_n = a$ *деп жазылат. (Лимит x_n, n чексизге умтулганда* a га барабар деп окулат).

Аныктама.

Предели нөлгө барабар болгон өзгөрмө чоңдукту чексиз кичине чоңдук дейбиз.
$lim x_n = 0$ *болсо, x_n өзгөрмөсү чексиз кичине чоңдук болот.*

Чексиз кичине чоңдуктар төмөнкү касиеттерге ээ:

1. Чексиз кичинелердин чектүү сандагы суммасы чексиз кичине болот.
2. Чексиз кичине менен турактуу чоңдуктун көбөйтүндүсү чексиз кичине болот.
3. Чектүү сандагы чексиз кичинелердин көбөйтүндүсү чексиз кичине болот.

Сан удаалаштыгын предели төмөндөгүдөй негизги касиеттерге ээ болот.

1. Эгерде $lim x_n = a$, $lim y_n = b$ болсо, анда.
$lim(x_n \pm y_n) = lim x_n \pm lim y_n = a \pm b$ *болот.*
2. Эгерде $lim x_n = a$ жана $lim y_n = b$ болсо, анда
$lim x_n \cdot lim y_n = lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$ *болот.*
3. Турактуу көбөйтүүчүнү предел белгисинин сыртына чыгарууга болот башкача айтканда $lim(cx_n) = c lim x_n$.
4. Бөлчөктүн предели, алымынын пределин бөлүмүнүн пределине бөлгөнгө барабар, башкачча айтканда

$lim\frac{x_n}{y_n} = \frac{limx_n}{limy_n}$, *мында* $limy_n \neq 0$

Эскертүү: 1-4-касиеттердеги барабардыктарда $n \to \infty$ *деп эсептелет. Берилген мисалдарда да* $n \to \infty$ *деп эске алгыла.*

3-мисал. Пределдердин негизги касиеттерин пайдаланып төмөнкү пределдерди тапкыла.

а) $lim5 = 5$ *Туруктуу сандын предели өзүнө барабар.*

б) $lim\frac{1}{n} = 0$

в) $lim\left(7 \cdot \frac{1}{n^2}\right) = 7 \cdot lim\frac{1}{n} \cdot lim\frac{1}{n} = 7 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

г) $lim\left(\frac{3n+1}{n}\right) = lim\left(3 + \frac{1}{n}\right) = lim3 + lim\frac{1}{n} = 3$

д) $lim(\frac{2-5n}{3n+1})$= *бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн* n *ге бөлөбүз*= $lim\left(\frac{\frac{2}{n}-5}{3+\frac{1}{n}}\right) = \frac{lim(\frac{2}{n}-5)}{lim(3+\frac{1}{n})} = \frac{lim\frac{2}{n}-lim5}{lim3+lim\frac{1}{n}} = \frac{0-5}{0+3} = -\frac{5}{3}$

е) $lim\frac{3(7n^2-2n+5)}{3-5n+3n^2} = lim3 \cdot lim\frac{7-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n}+3} = 3 \cdot \frac{lim(7-\frac{n}{2}+\frac{5}{n^2})}{lim(\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n}+3)} = 3 \cdot \frac{7}{3} = 7;$

ж) $lim\left(\frac{7\cdot5^n+5}{5^n}\right) = lim\left(7 + \frac{5}{5^n}\right) = lim7 + lim\frac{5}{5^n} = 7 + 0 = 7$

з) $lim\frac{1+2+3+\cdots+n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$ = *Бул бөлчөктүн алымы жана бөлүмү арифметикалык прогрессия.*

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ *формуласын пайдаланабыз.*

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{n + n^2}{2}, \qquad S_n^1 = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2;$$

$$lim\frac{\frac{n+n^2}{2}}{n^2} = lim\frac{n+n^2}{2n^2} = lim\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right) = lim\frac{1}{2n} + lim\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2.1. Көнүгүүлөр үчүн тапшырма.

46. Пределдерди тапкыла.

а) $lim\frac{5n-9}{3-2n}$; *б)* $lim\frac{5(3n^2+1)}{3-2n+5n^2}$;

в) $lim\frac{7n^2-4n+5}{n^3+n^2+n}$; *г)* $lim\frac{3n^3+5n^2-1}{4-2n+7n^3}$

47. Эгерде $limx_n = 5$, $limy_n = 3$ *болсо,*

$lim(x_n + y_n)$, $lim(x_n \cdot y_n)$, $lim(\frac{x_n}{y_n})$ *ди тапкыла.*

2.2. Функциянын чекиттеги предели.

Аныктама.

Эгерде функциянын аныкталуу областындагы аргументтин маанилеринен түзүлгөн ар кандай $\{x_n\}$ *удаалаштыгы* a *пределине башкача айтканда* $\lim x_n = a$ *болсо, жана ал удаалаштыкка туура келүүчү функциянын маанилеринен түзүлгөн* $\{f(x_n)\}$ *түрүндөгү удаалаштыктардын бардыгы бир эле A пределине ээ болушса, анда A саны* $f(x)$ *функциясынын* $x = a$ *чекитиндеги предели деп аталат жана ал* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *деп жазылат.*

'" x a га умтулганда $f(x)$ *тин предели A га барабар, деп окулат.*

Функциянын предели төмөндөгүдөй негизги касиеттерге ээ болот.

1. Эгерде $f(x) = C$ *болсо, башкача айтканда функция турактуу маанилерди гана алса, анын предели ошол турактуунун өзүнө барабар.*

$$\lim_{x\to a} c = c$$

2. Турактуу чоңдукту пределдин белгисинин сыртына чыгарууга болот.

$$\lim_{x\to a}(cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x)$$

3. Эки функциянын суммасынын (айырмасынын) предели пределдердин суммасына (айырмасына) барабар.

$$\lim_{x\to a}\big(f_1(x) \pm f_2(x)\big) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x)$$

4. Эки функциянын көбөйтүндүсүнүн предели, пределдердин көбөйтүндүсүнө барабар.

$$\lim_{x\to a}\big(f_1(x) \cdot f_2(x)\big) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$$

5. Эки функциянын катышынын предели, алымынын пределин бөлүмүнүн пределине бөлгөнгө барабар.

$$\lim_{x\to \alpha} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}$$

Мында $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0.$

Катыштын пределин табууда, бөлчөктүн бөлүмүнүн жана алымынын пределдери нөлгө же чексизге айланып калышы мүмкүн. Мындай учурларда, пределге өтүүдөн мурда берилген бөлчөктү теңдеш өзгөртүү керек. Ал үчүн бөлчөктүн бөлүмүн жана алымын көбөйтүүчүлөргө ажыратып аны кыскартуу, *иррационалдыктан бошотуу, алымын жана бөлүмүн бирдей чоңдукка көбөйтүү жана бөлүү аткарылат.*

Мисалдар чыгаруу

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$ *башкача айтканда* $\lim\limits_{x\to 1} 10 = 10;$

2. $\lim\limits_{x\to 2} 7x = 7\lim\limits_{x\to 2} x = 7\cdot 2 = 14;$

3. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2x)(2x-5) = \lim\limits_{x\to 3}(x^2+2x)\cdot\lim\limits_{x\to 3}(2x-5) =$
$= (3^2+2\cdot 3)(2\cdot 3-5) = (9+6)(6-5) = 15;$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+4}{x^2+5x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-3x+4)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5x-1)} = \frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1+4}{1^2+5\cdot 1-1} = \frac{2-3+4}{1+5-1} = \frac{3}{5};$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+2x-8}$ *бул бөлчөктүн пределин тикеден-тике эсептесек анын алымы да, бөлүмү 0 гө барабар болуп* $\frac{0}{0}$ *аныксыздыгына ээ болобуз. Ошондуктан бөлчөктүн алымы менен бөлүмүн көбөйтүүчүлөргө ажыратып өзгөртүп түзөбүз.*

$x^3-2x^2-x+2 = x^2(x-2)-(x-2) = (x-2)(x^2-1);$

$x^2+2x-8 = x^2+4x-2x-8 = x(x+4)-2(x+4) =$
$= (x+4)(x-2);$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+2x-8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-1)}{(x+4)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x+4} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+4)} = \frac{2^2-1}{2+4} =$$
$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-2} =$ *Бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн*

$\left(\sqrt{4+x}+2\right)$, *бөлүмдүн түйүндошуно көбөйтөбүз*

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{4x}+2)}{(\sqrt{4+x}-2(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{4+x-4} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x}+2\right) = \sqrt{4+0}+2 = 4$$

2.2. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

48. Төмөнкү пределдерди эсептегиле.

а) $\lim\limits_{x\to 1} 100x;$ *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-x}-\sqrt{9+x}}{3x};$

б) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2x^2+5x-7);$ *е)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6};$

в) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2-6}{3x+5}$; ж) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-25}{x-5}$

г) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2+3x-2}{2x^2-5x+5}$; з) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^2+3x}{6x^2}$;

2.3. Функциянын өсүндүсү. Функциянын үзгүлтүксүздүгү жөнүндө түшүнүк.

Аныктама.

Аргументтин жаңы x_1 мааниси менен анын баштапкы x маанисинин айырмасы аргументтин өсүндүсү деп аталат жана Δx деп белгиленет. (дельта x деп окулат).

$\Delta x = x_1 - x$ *же* $x_1 = x + \Delta x$

Аныктама.

Функциянын жаңы y_1 мааниси менен анын баштапкы y маанисинин айырмасы функциянын өсүндүсү деп аталат жана Δy деп белгиленет.(дельта игрек) башкача айтканда $\Delta y = y_1 - y$ же

$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$

1-мисал. $y = 2x - 1$ *функциясы берилсин:*

а) $x = 1, \Delta x = 0{,}2$ *болсо,* x_1 *жана* Δy *ти*

б) $x = 2, \Delta x = 0{,}1$ *болсо,* Δy *ти тапкыла.*

Чыгаруу: а) Аныктама боюнча $x_1 = x + \Delta x$ *демек,*

$x_1 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2.$

Функциянын өсүндүсү $\Delta y = f(x_1) - f(x)$

$\Delta y = (2x_1 - 1) - (2x - 1) = (2 \cdot 1{,}2 - 1) - (2 \cdot 1 - 1) =$

$= (2{,}4 - 1) - (2 - 1) = 1{,}4 - 1 = 0{,}4$ *демек,* $\Delta y = 0{,}4$;

б)$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ *формуласын колдонобуз*

$\Delta y = (2(2 + 0{,}1) - 1) - (2 \cdot 2 - 1) = 3{,}2 - 3 = 0{,}2;$

2-мисал. $f(x) = x^2 - x + 2$ *функциясынын* $x = 1$ *жана* $\Delta x = 0{,}1$ *болгондогу өсүндүсүн тапкыла.*

Чыгаруу: 1)$x_1 = x + \Delta x = 1 + 0{,}1 = 1{,}1,$

2)$f(1) = 1^2 - 1 + 2 = 2,$

3) $f(1{,}1) = (1{,}1)^2 - 1{,}1 + 2 = 2{,}21 - 1{,}1 + 2 = 2{,}11,$

4)$\Delta y = f(1{,}1) - f(1) = 2{,}11 - 2 = 0{,}11.$

Жообу: $\Delta y = 0{,}11.$

Аныктама.

Эгерде $y = f(x)$*функциясы* x_0 *чекитинде аныкталган болсо жана аргументтин* $\Delta x = x - x_0$ *өсүндүсү нөлгө* *умтулганда функциянын да ага туура келүүчү* $\Delta y = y - y_0$ *өсүндүсү нөлгө умтулса, анда бул функция* x_0 *чекитинде үзгүлтүксүз деп аталат, башкача айтканда* $y = f(x)$ *функциясы* x_0 *чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$.

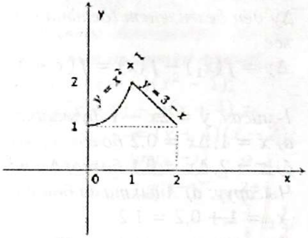
3-мисал.

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \le x < 1, \\ 3 - x, & 1 \le x \le 2, \end{cases}$ *функциясы* $[0; 2]$ *кесиндисинде үзгүлтүксүз экендигин көрсөткүлө.*

Чыгаруу: $f(x) = x^2 + 1$ *функциясы* $0 \le x \le 1$ *аралыгында үзгүлтүксүз, ал эми* $f(x) = 3 - x$ *функциясы* $1 \le x \le 2$ *аралыгында үзгүлтүксүз. Бул функциясынын* $a = 1$ *чекитиндеги үзгүлтүксүздүгүн аныкташыбыз зарыл. Ал үчүн функциянын* $a = 1$ *чекитиндеги пределдерин эсептейбиз.*

$f(1 - 0) = 1^2 + 1 = 2$,

$f(1 + 0) = 3 - 1 = 2$ *жана* $f(1) = 2$ *болгондуктан,* $f(1 - 0) = = f(1 + 0) = f(1) = 2$ *демек,* $f(x)$ *функциясы* $a = 1$ *чекитинде да үзгүлтүксүз.*



35-сүрөт

2.3. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

49. Төмөнкү функциялардын өсүндүлөрдүн тапкыла.

а) $f(x) = 3x + 2$; $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}01$;

б) $f(x) = \frac{3}{x}$; $x_0 = 3$; $\Delta x = 0{,}1$;

в) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}1$;

г) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}2$.

50. $y = 2x - x^2$ *функциясы берилсе:*

а) $x = 8$, $\Delta x = 0{,}5$; *б)* $x = -2$, $\Delta = 0{,}3$ *болгондо, берилген функциянын* Δy *өсүндүсүн тапкыла.*

51. а) $f(x) = tgx,\ x_0 = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{3\pi}{4};$

б) $f(x) = cosx,\ x_0 = \frac{2\pi}{3},\ x = \frac{5\pi}{6}.$ *болсо,* x_0 *чекитиндеги* Δx *жана* Δf *өсүндүлөрүн тапкыла.*

III глава. Туунду жана анын колдонуштары.
3.1. Туунду. Функциянын туундусунун аныктамасы.
Аныктама.

Эгерде $y = f(x)$ *үзгүлтүксүз функциясынын* Δy *өсүндүсүнүн, аргументтин* Δx *өсүндүсүнө болгон катышынын* Δx *нөлгө умтулгандагы предели табылса, анда ал предел берилген функциясынын* x_0 *чекитиндеги туундусу деп аталат жана ал туунду* y_0' *(игрек нөл штрих) же* $\frac{dy(x_0)}{dx}$ *(де игрек де икс боюча) же* $f'(x)$ *(эф штрих* x_0 *дөн) деп белгиленет.*

Демек, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y_0'$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

1-мисал. $y = 4x$ *функциясынын туундусун тапкыла.*

Чыгаруу: 1) x ке Δx *өсүндүсүн берип, функциянын* $x + \Delta x$ *маанисиндеги жаңы маанисиндеги жаңы маанинисин тапсак* $f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)$ *болот.*

2) Функциянын өсүндүсүн табабыз.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 4x + 4\Delta x - 4x = 4\Delta x.$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\Delta x}{\Delta x} = 4$

4) функциянын туундусу

$$y' = (4x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x}{\Delta x} = 4. \quad \text{демек, } (4x)' = 4.$$

2-мисал. $y = x^2 + 3$ *функциясынын туундусун тапкыла.*

Чыгаруу: 1) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 3 = x^2 + 2\Delta x + \Delta x^2 + 3.$

2)$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3) - (x^2 + 3) =$
$= 2x\Delta x + \Delta x^2$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

3.2. Туундуну эсептөөнүн эрежелери.

Турактуу чоңдуктун туундусу нөлгө барабар, б.а.

$$C' = 0.$$

Мисалы: $5' = 0$ $\quad (-0{,}74)' = 0.$

1-эреже.*Эгерде* u *жана* φ *функциялар* x_0 *чекитинде дифференцирленишсе, анда алардын суммасы да ошол чекитте дифференцирленет жана*

$(u + \vartheta)' = u' + \vartheta'$ *болот б.а. суммасын туундусу туундулардын суммасына барабар.*

2-эреже. *Көбөйтүндүнүн туундусу.*

Эки функциянын көбөйтүндүсүнүн туундусу, биринчисинин туундусун экинчисине көбөйтүп, экинчисинин туундусунун биринчисине көбөйтүп, аларды суммалаганга барабар, б.а.

$$(u \cdot \vartheta)' = u'\vartheta + u\vartheta'.$$

Натыйжа. Турактуу көбөйтүүчүнү туундунун белгисинин сыртына чгарууга болот, б.а.

$$(Cu)' = Cu'$$

Бөлчоктүн туундусу.

3-эреже. *Эгерде u жана ϑ функциялары x_0 чекитинде дифференцирленинсе жана $\vartheta(x_0) \neq 0$ болсо, анда $\frac{u}{\vartheta}$ катышынын x_0 чекитиндеги туундусу $\left(\frac{u}{\vartheta}\right)' = \frac{u'\vartheta - u\vartheta'}{\vartheta^2}$ формуласы менен табылат.*

4-эреже. *Даражанын туундусу.*

n *—бирден чоң каалагандай натуралдык сан болгон учурда x^n даражалуу функциясынын туундусу төмөнкүдөй формула менен эсептелет:*

$$(x^n)' = nx^{n-1};$$

Мисалы, $(x^4)' = 4x^{4-1} = 4 \cdot x^3$,

$(x^{10})' = 10x^9, \qquad (5x^4)' = 5 \cdot 4 \cdot x^3 = 20x^3.$

1-мисал. $y = x$ *жана* $y = 7x$ *функцияларнын туундусун тапкыла.*

Чыгаруу: $y' = (x)' = 1;\ \ y' = (7x)' = 7 \cdot 1 = 7.$

2-мисал. Төмөнкү функциялардын суммасынын туундусун тапкыла.

а) $f(x) = 3x + 5;$ *в)* $f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 7;$

б) $f(x) = x^2 + 8x + 9;$ *г)* $f(x) = 5x^3 + 10x^2 + 6x + 2.$

Чыгаруу: а) $f'(x) = (3x + 5)' = 3 \cdot (x)' + 5' = 3 + 0 = 3;$

б) $f'(x) = (x^2 + 8x + 9)' = (x^2)' + 8 \cdot x' + 9' = 2x + 8;$

в) Даражанын туундусун табуу эрежесин пайдаланабыз.

$f'(x) = (x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 7)' = (x^4)' + 5 \cdot (x^3)' + 2 \cdot (x^2)' + x' + 7' = 4x^3 + 5 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x + 1 = 4x^3 + 15x^2 + 4x + 1;$

г) $f'(x) = (5x^3)' + 10x^2 + 6x + 2 = 15x^2 + 20x + 6;$

3-мисал. Функциялардын туундуларын тапкыла.

а) $y = \sqrt{x};$ *г)* $y = x^3(5x - x^2);$

б) $y = \frac{2+3x}{3-2x};$ *д)* $y = \frac{2-3x}{x^2};$

в) $y = (3x-2)(5-x^2)$; *е)* $y = \frac{x}{5} + \frac{2}{x^2} + \sqrt{x}$;

Чыгаруу: а) $y = \sqrt{x}$:

$y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

б) $y' = (\frac{2+3x}{3-2x})' = \frac{(2+3x)'\cdot(3-2x)-(2+3x)(3-2x)'}{(3-2x)^2} = \frac{10}{(3-2x)^2}$.

в) $y' = (3x-2)(5-x^2))' = (3x-2)'\cdot(5-x^2) + (3x-2)(5-$
$-x^2)' = 3(5-x^2) + (3x-2)\cdot(-2x) = 15 - 3x^2 + 4x - 6x^2 ==$
$-9x^2 + 4x + 15$;

г) $y' = (x^3(5x-x^2))' = (x^3)'(5-x^2) + x^3\cdot(5x-x^2)' =$
$3x^2(5-x^2) + x^3\cdot(5-2x) = 15x^2 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^4 =$
$= -5x^4 + 5x^3 + 15x^2$;

д) $y' = (\frac{2-3x}{x^2})' = \frac{(2-3x)'\cdot x^2-(2-3x)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{-3x^2-(2-3x)\cdot 2x}{x^4} =$
$= \frac{-3x^2-4x+6x^2}{x^4} = \frac{3x^2-4x}{x^4} = \frac{3x-4}{x^3}$;

е) $y' = (\frac{x}{5} + \frac{2}{x^2} + \sqrt{x})' = (\frac{x}{5})' + (\frac{2}{x^2})' + (\sqrt{x})' =$
$= \frac{1}{5} + \frac{2'\cdot x^2 - 2\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{5} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4-мисал. Берилген чекиттерде f функциясынын туундусунун маанилерин эсептегиле.

а) $f(x) = 2x^2 - 5x,\ x = -2,\ x = 3$.

б) $f(x) = 2\sqrt{x} + 3x,\ x = 9;\ x = 0{,}09$;

в) $f(x) = x\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{x},\ x = 4;\ x = 1$;

г) $f(x) = \frac{5-x}{3+x},\ x = 4,\ x = -1$

Чыгаруу: а) $f'(x) = (2x^2 - 5x)' = 4x - 5,\ x = -2, x = 3$;
$f'(-2) = 4\cdot(-2) - 5 = -8 - 5 - 13$,
$f'(3) = 4\cdot 3 - 5 = 12 - 5 = 7$

б) $x = 9;\ x = 0{,}09;\ f'(x) = (2\sqrt{x} + 3x)' = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 = \frac{1}{\sqrt{x}} + 3$,
$f'(9) = \frac{1}{\sqrt{9}} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = 3\frac{1}{3}$,
$f'(0{,}09) = \frac{1}{\sqrt{0{,}09}} + 3 = \frac{1}{0{,}3} + 3 = \frac{10}{3} + 3 = 3\frac{1}{3} + 3 = 6\frac{1}{3}$;

в) $x = 4, x = 1$

$f'(x) = \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = (x\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)' = x'\sqrt{x} + x\cdot(\sqrt{x})' - \frac{1}{x^2} =$
$= \sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^2}$;

$$f'(4) = \frac{3\sqrt{4}}{2} - \frac{1}{4^2} = \frac{3\cdot 2}{2} - \frac{1}{16} = 3 - \frac{1}{16} = 2\frac{15}{16};$$

$$f'(1) = \frac{3\cdot\sqrt{1}}{2} - \frac{1}{1^2} = 1\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

г) $x = 4, x = -1;$

$$f'(x) = \left(\frac{5-x}{3+x}\right)' = \frac{(5-x)'(3+x)-(3+x)'(5-x)}{(3+x)^2} = \frac{-1\cdot(3+x)-1\cdot(5-x)}{(3+x)^2} =$$
$$= \frac{-3-x-5+x}{(3+x)^2} = \frac{-8}{(3+x)^2},$$

$$f'(4) = \frac{-8}{(3+4)^2} = \frac{-8}{7^2} = -\frac{8}{49},$$

$$f'(-1) = \frac{-8}{(3-1)^2} = \frac{-8}{2^2} = \frac{-8}{4} = -2\,.$$

5-мисал. Эгерде:

а) $f(x) = 3x^2 - 2x;$ *б)* $f(x) = \frac{2x^3}{3} - 4x^2 - 5$ *болсо,* $f'(x) = 0$ *теңдемесин чыгаргыла.*

Чыгаруу: Берилген функциянын туундусун табабыз, аны нөлгө барабарлап, ал теңдемени чыгарабыз.

а) $f'(x) = (3x^2 - 2x)' = 6x - 2,$

$6x - 2 = 0,$

$6x = 2,$

$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$ *Жообу:* $x = \frac{1}{3};$

б) $f'(x) = \left(\frac{2x^3}{3} - 4x^2 - 5\right)' = 2x^2 - 8x$

$2x^2 - 8x = 0$

$2x(x-4) = 0$

$x = 0$

$x - 4 = 0$

$x = 4.$ *Жообу:* $x = 0;\ x = 4;$

3.3 Татаал функция жана анын туундусу.

Аныктама.

$y = f(u), u = \varphi(x)$ эки функция берилсин жана биринчи функциянын $D(f)$ аныкталуу областына, экинчи функциянын маанилеринин көптүгү тиешелүү болсун. Анда $D(\varphi)$ областынан алынган ар бир x ке φ эрежеси аркылуу толук аныкталган u санына f эрежеси аркылуу y саны туура келет. Демек f жана φ эрежелери x тин ар бир маанисине y тин да бирден маанилерин туура келтирет, ал маанилер $y = f(\varphi(x))$ туюнтмасы аркылуу табылат. Бул учурда, y өзгөрмөсү x тин татаал функциясы деп

аталат. Мында x*-көз каранды эмес өзгөрмө (аргумент) ал эми* u *арадагы аргумент деп аталат. Мисалы,* $y = cosx^2$, $y = (2x - 3)^4$ *бул функцияларды* x *тин татаал функциялары деп кароого болот. Арадагы* u *аргументинин жардамы менен бул функцияларды эки жөнөкөй функцияга ажыратып жазууга болот.*

$y = cosu, u = x^2$, *жана* $y = u^4, u = 2x - 3$.

Татаал функциянын туундусу төмөндөгүдөй болот.

Эгерде $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ *жана* $y = f(\varphi(x))$ *болсо, анда бул татаал функциядан* x *өзгөрмөсү боюнча алынган туундусу* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ *формуласы менен табылат.*

1-мисал. Төмөнкү татаал функциялардын туундуларын тапкыла.

а) $y = (3x-2)^4$; *б)* $y = \sqrt[4]{3x-7}$;

Чыгаруу: а) $y = (3x-2)^4$; $u = 3x - 2$ *деп арадагы аргумент менен белгилеп алабыз.*

Татаал функция $y = u^4$ *түрүнө келет анда*

$y'_x = y'_u \cdot u'_x$ *формуласы боюнча*

$y' = (u^4)' \cdot u' = 4u^3 \cdot (3x-2)' = 4u^3 \cdot 3 = 12u^3 = 12(3x-2)^3$

болот.

б) $y = \sqrt[4]{3x-7}; u = 3x - 7$, *демек функция* $y = \sqrt[4]{u} = u^{\frac{1}{4}}$ *түрүнө келет.*

$$y' = (u^{\frac{1}{4}})' \cdot u' = \frac{1}{4}u^{\frac{1}{4}-1} \cdot (3x-7)' = \frac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}} \cdot 3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{u^{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{(3x-7)^3}};$$

Бул туундуну кыскача төмөндөгүдөй эсептөөгө да болот.

$$y' = ((3x-7)^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4}(3x-7)^{-\frac{3}{4}} \cdot (3x-7)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(3x-7)^{\frac{3}{4}}} \cdot 3 = \frac{3}{4\sqrt[4]{(3x-7)^3}}.$$

3.4. Тригонометриялык функциялардын туундулары.

$y = sinx$ *функциясынын туундусу* $y' = (sinx)' = cosx$ *болот. Кыскача тригонометриялык функциялардын туундуларынын формулаларын төмөндөгүдөй жазууга болот.*

$(sinx)' = cosx;$

$(cosx)' = -sinx;$

$(tgx)' = \frac{1}{cos^2x};$

$(ctgx)' = \frac{1}{sin^2x};$

Эскертүү: далилдөөлөрү берилбейт.

1-мисал. Функциялардын туундуларын тапкыла.

а) $y = 5sinx;$ *д)* $3sinx \cdot cos2x;$

б) $y = 2sinx + 3cosx;$ *е)* $y = tgx \cdot sinx;$

в) $y = 7tgx;$ *ж)* $y = \frac{ctgx}{cosx};$

г) $y = ctgx + 6sinx;$ *з)* $y = sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right)$

Чыгаруу: Тригонометриялык функциялардын туундуларын табуу формулаларын, татаал функциянын туундусун табуу формуласын колдонобуз.

а) $y' = (5sinx)' = 5cosx;$

б) $y' = (2sinx + 3cosx)' = 2cosx - 3sinx;$

в) $y' = (7tgx)' = \frac{7}{cos^2x};$

г) $y' = (ctgx + 6sinx)' = \frac{1}{cos^2x} + 6cosx;$

д) $y' = (3sinx \cdot cos2x)' = 3((sinx)' \cdot cos2x + sinx(cos2x)') =$
$= 3(cosx3x - 2sin^2xcosx) = 3cos3x - 6sin^2xcosx;$

е) $y' = (tgx \cdot sinx)' = (tgx)'sinx + tgx \cdot (sinx)' =$
$= \frac{1}{cos^2x} \cdot sinx + tgxcosx = \frac{sinx}{cos^2x} + \frac{sinx}{cosx} \cdot cosx = \frac{sinx}{cos^2x} + sinx;$

ж) $y' = \left(\frac{ctg\,x}{cos\,x}\right)' = \left(\frac{\frac{cos\,x}{sin\,x}}{cos\,x}\right)' = \left(\frac{1}{sin\,x}\right)' = -\frac{1}{sin^2x} \cdot sin'x =$
$= -\frac{1}{sin^2x} \cdot cos\,x = -\frac{cos\,x}{sin^2x};$

з) $y' = \left(sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right)\right)' = cos\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3} + 5x\right)' =$
$= 5\,cos\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right);$

Дифференцирлөөнүн эрежелери формулалары.

Функция	*Туунду табуу эрежеси.*	*Татаал функциялардын туундулары.*	
$y = c$	$y' = 0$	$y = \frac{a}{u}$	$y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u'$
$y = x$	$y' = 1$	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1} \cdot u'$
$y = cu$	$y' = cu'$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$y = u \pm \varphi$	$y' = u' \pm \varphi'$	$y = sinu$	$y' = cosu \cdot u'$
$y = u \cdot \varphi$	$y' = u'\varphi + u\varphi'$	$y = cosu$	$y' = -sinu \cdot u'$
$y = \frac{u}{\varphi}$	$y' = \frac{u'\varphi - u\varphi'}{\varphi^2}$	$y = tgu$	$y' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = ctgu$	$y' = -\frac{1}{sin^2 u} - u'$
$y = sin\, x$	$y' = (sinx)' = cosx$	$y = arcsinu$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$y = cos\, x$	$y' = (cosx)' = -sinx$	$y = arccosu$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$y = tg\, x$	$y' = (tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$	$y = arctgu$	$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$y = ctg\, x$	$y' = (ctgx)^1 = \frac{1}{sin^2 x}$,,	$y = arcctgu$	$y' = -\frac{1}{1+u^2} u'$

Функциялардын туундуларын табууда ушул таблицадагы формулаларды пайдаланабыз.

3.1.-3.4. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

52. Функциянын туундусунун аныктамасын пайдаланып төмөнкү функциялардын туундуларын тапкыла.

а) $y = x^2 - 2x$; *б)* $y = \sqrt{x}$.

53. Дифференцирлөө эрежелерин пайдаланып, төмөнкү функциялардын туундуларын тапкыла.

а) $y = x^{12}$; *ж)* $y = \frac{1}{x^4}$;

б) $y = 4x^9$; *з)* $y = \frac{3}{x^{-4}}$;

в) $y = x^{-6}$ *и)* $y = \frac{5}{7\sqrt{x}}$;

г) $y = -2x^{-14}$; *к)* $y = \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}$;

д) $y = 6\sqrt{x}$; *л)* $y = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

е) $y = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3}$;

54. Функциялардын туундуларын тапкыла.

а) $y = 3x^4 - 2x;$ е) $y = \frac{3x-1}{2-4x};$

б) $y = 2x^{16} - x^8 + 3x^7 + 5x;$ ж) $y = \sqrt{x}(x+3);$

в) $y = 5x^3 + 3\sqrt{x};$ з) $y = \frac{x+2}{\sqrt{x}};$

г) $y = \frac{x}{3} - \frac{5}{3x^2} - x\sqrt{x};$ и) $y = (2 - x^2)(1 + \sqrt{x});$

д) $y = \frac{2x-3}{5+x};$ к) $y = (x + x^3)(\sqrt[3]{x} - 5);$

55. *Көрсөтүлгөн чекиттерде төмөнкү функциялардын туундуларын эсептегиле.*

а) $f(x) = 2x^2 - 5x,\ x = 2$ *жана* $x = -3$ *болсо;*

б) $f(x) = \frac{5-x}{3+x},\ x = 0$ *жана* $x = -1$ *болсо;*

в) $f(x) = 6\sqrt{x} + 2x,\ x = 9,\ x = 0{,}01.$

56. *Татаал функциялардын туундуларын тапкыла.*

а) $y = (x^3 + 2)^4;$ г) $y = \sqrt{5 - 2x};$

б) $y = (2x^2 + 5x - 4)^6;$ д) $y = \sqrt{6X^2 - 5};$

в) $y = \sqrt{3x - 7};$ е) $y = \sqrt{2x^3 - 3x}.$

57-63. *Функцияларынын ар биринин туундусун тапкыла.*

57. а) $y = 2cosx;$ в) $y = 3tgx + 5;$

б) $y = \frac{1}{3}sinx;$ г) $y = 4sinx - cosx;$

58. а) $y = tgx + sinx;$ в) $y = 5x - tg(-3x);$

б) $y = \frac{1}{2}sin(4x - \frac{\pi}{2});$ г) $y = \frac{1}{3}cos(\pi + 3x).$

59. а) $y = sin5x;$ в) $y = 3ctg(-\frac{1}{3}x);$

б) $y = tg(-2x);$ г) $y = \frac{1}{4}cos4x.$

60. а) $y = x^2 \cdot cosx;$ в) $y = \frac{sin2x}{x};$

б) $y = \sqrt{x} \cdot sinx;$ г) $y = \frac{x}{cosx}.$

61. а) $y = sin^2x + cos^2x;$ в) $y = cos^2 3x - sin^2 3x;$

б) $y = sin3x \cdot cos2x + cos3x \cdot sin2x;$ г) $y = sin5x \cdot cos5x.$

62. а) $y = \sqrt{tgx};$ в) $y = \sqrt[4]{sinx};$

б) $y = \sqrt{3sinx - 1};$ г) $y = \sqrt[3]{cosx + 3}.$

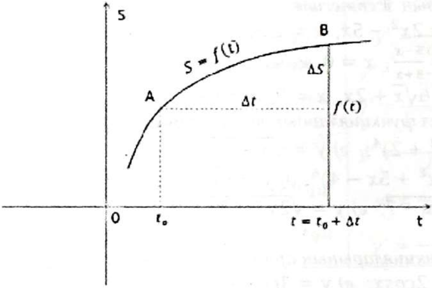
63. а) $y = sin(\frac{\pi}{4} - 3x);$ в) $y = tg(\frac{\pi}{3} + x);$

б) $y = cos(\frac{\pi}{6} + 5x);$ г) $y = ctg(\frac{\pi}{4} - x).$

3.5. Туундунун механикалык мааниси.

Убакыттын берилген моментиндеги (кирпик каккыча болгон) ылдамдыкты төмөнкүдөй табабыз. Убакыттын t_o *моментинде кыймылдагы М чекити А абалында болсун дейли. Андан* $\Delta t = t - t_o$ *убакыт өткөндөн кийин б.а. убакыттын* $t = t_o + \Delta t$ *моментиндеги кыймылдагы чекит В абалына келет жана ал убакыт ичинде*

$\Delta S = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ *жолун басып өтөт. (36-сүрөт)*



36-сүрөт

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *катышы кыймылдын орточо ылдамдыгын берет, б.а.*

$$V_{орт} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Убакыттын $t = t_o$ *кезиндеги ылдамдыгы төмөндөгүдөй болот.*

$$V(t_o) = S'(t_o) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t};$$

Басып өтүлгөн жолдун узундугунан убакыт боюнча алынган туунду, ал кыймылдын, убакытын t_o *моментиндеги кирпик каккыча болгон ылдамдыгына барабар. Туундунун механикалык мааниси ушул болот.*

1-мисал. Чекит $S = 6t - 5$ *кыймыл закону боюнча бир калыпта түз сызыктуу кыймылдайт кыймылдын ылдамдыгын тапкыла.*

Чыгаруу: *Өтүлгөн жолдун узундугунан t боюнча туунду алабыз, б.а.*

$$V(t) = S'(t) = (6t - 5)' = 6 \frac{\text{уз.бирд}}{\text{сек}};$$

Жообу: $V = 6\frac{\text{уз.бирд}}{\text{сек}}$.

2-мисал. Нерсе $S = 5t^2 + 3t - 1$ *кыймыл закону боюнча бир калыпта эмес кыймлдайт.*

а) $t_0 = 4\text{сек}$; *б)* $t_0 = 12$ *сек болгондо, ошол нерсенин кймылынын ылдамдыгын тапкыла.(Узундук метр менен)*

Чыгаруу: $V(t_0) = S'(t_0)$ *формуласын пайдаланабыз.*

$V(t) = S'(t) = (5t^2 + 3t - 1)' = 10t + 3;$

$V(4) = 10 \cdot 4 + 3 = 40 + 3 = 43\frac{\text{м}}{\text{сек}};$

$V(12) = 10 \cdot 12 + 3 = 120 + 3 = 123\frac{\text{м}}{\text{сек}}.$

Жообу: $V(4) = 43\text{м/сек}, V(12) = 143\text{м/сек}.$

3-мисал. Чекит $S = \frac{5}{t} + 4t^2$ *кыймыл закону боюнча кыймылдаса, анын ылдамдыгын тапкыла.*

Чыгаруу: *Өтүлгөн жолдун убакыт боюнча алынган туундусу, нерсенин ылдамдыгы болот.* $V(t) = S'(t),$

$V = S' = (\frac{5}{t} + 4t^2)' = -\frac{5}{t^2} + 8t,$

Жообу: $V = 8t - \frac{5}{t^2}.$

4-мисал. Чекиттин кыймыл закону $S = 80t + t^2 - \frac{1}{3}t^3$ *барабардыгы менен берилсе* $(t\ \text{сек}, S\ \text{м})$, *кыймыл башталгандан тартып,* $(t = 0)$ *кыймыл токтогонго чейинки* $(V(t) = 0)$ *убакытты жана ал убакытта өтүлгөн аралыкты тапкыла.*

Чыгаруу: $V(t) = S'(t) = (80t + t^2 - \frac{1}{3}t^3)' = 80 + 2t - t^2.$

Демек, $V(t) = 80 + 2t - t^2$ *закону боюнча аныкталат. Кыймыл токтогонго чейинки убакытты табуу үчүн* $80 + 2t - t^2 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$t^2 - 2t - 80 = 0, D = 4 + 320 = 324,$

$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2};$

$t_1 = \frac{2+18}{2} = 10\text{сек};\ t_2 = \frac{2-18}{2} = -9.$

Демек, кыймыл 10 секундадан кийин токтойт. Бул убакытта өтүлгөн аралык $S = 80t + t^2 - \frac{1}{3}t^3$ *закону боюнча аныкталат.*

$$S = 80 \cdot 10 + 10^2 - \frac{1}{3}10^3 = 800 + 100 - \frac{1}{3} \cdot 1000 =$$

$= 900 - 333\frac{1}{3} = 566\frac{2}{3}\text{м}.$ *Жообу:* $t = 10\text{сек},\ S = 566\frac{2}{3}\text{м}.$

3.6. Туундунун геометриялык мааниси.

$y = f(x)$ *функциянын* x_o *чекитиндеги туундусу, бул функциянын графигинин* $M_o(x_o, y_o)$ *чекитиндеги жаныма-сынын бурчтук коефициентине барабар, б.а.*

$$f'(x_o) = k = tg \propto.$$

Мына ушул, туундунун геометриялык мааниси болот.

Аныктама.

$y = f(x)$ *функциясынын* $M_o\left(x_o, f(x_o)\right)$ *чекитине жүргүзүлгөн жаныма деп, ушул чекит аркылуу өтүүчү жана бурчтук коефициенти* $k = f'(x_o)$ *болгон түз сызыкты айтабыз.*

Бул аныктама боюнча жаныманын теңдемеси төмөнкүдөй болот.

$$y = f'(x_o)x + b; \quad \text{мында} \quad b = f(x_o) - f'(x_o) \cdot x_o$$

болгондуктан жаныманын теңдемеси

$y = f'(x_o) \cdot x + f(x_o) - f'(x_o) \cdot x_o$ *же*

$$y = f(x_o) + +f'(x_o)(x - x_o) \text{ болот.}$$

1-мисал. $f(x) = 2x^2$ *функциясынын графигинин* $M_o(1; 2)$ *чекитине жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин жазгыла.*

Чыгаруу: $x_o = 1.$ $\quad f(x_o) = f(1) = 2 \cdot 1^2 = 2.$

$$f'(x) = (2x^2)' = 4x, \quad f'(1) = 4 \cdot 1 = 4.$$

$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ *формуласы боюнча жаныма-нын теңдемесин табабыз.*

$$y = 2 + 4(x - 1) = 2 + 4x - 4 = 4x - 2.$$

Жообу: $y = 4x - 2$ *жаныманын теңдемеси.*

2-мисал. Төмөнкү ийри сызыктын абсциссасы көрсөтүлгөн чекитке жүргүзүлүүчү жаныманын бурчтук коэфициен-тин жана жанымасынын теңдемесин жазгыла.

$$f(x) = x^2 + 2x - 5, \quad x_o = 2.$$

Чыгаруу: $f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = 4 + 4 - 5 = 3;$

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 5)' = 2x + 2.$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6, \text{ демек, } \quad k = 6.$$

Жаныманын теңдемеси төмөнкүдөй болот.

$y = f(x_0) + f^1(x_0)(x - x_0)$

$y = 3 + 6(x - 2)$

$y = 6x - 9$. *Жообу: Бурчтук коэффицент:* $k = 6$, *жаныманын теңдемеси:* $y = 6x - 9$.

Лагранждын формуласы.

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)}$$

Бул формуланы төмөнкүдөй түрдө жазсак,
$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ *мындан* $[a, b]$ *кесиндисиндеги функциянын өсүндүсү, ал кесиндинин узундугун, кесиндинин кандайдыр бир ички чекитиндеги функциянын туундусуна көбөйткөнгө барабар экендиги келип чыгат.*

3-мисал. $y = f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ *функциясын* $[0; 2]$ *кесиндисинде карап, Лагранждын формуласындагы С нын маанисин тапкыла.*

Чыгаруу: $[0; 2]$ *кесиндисинин учтарындагы функциянын маанилерин табабыз.*

$f(0) = 4 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 0 - 2 = -2;$

$f(2) = 4 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 32 - 20 + 2 - 2 = 12;$

$f'(x) = (4x^3 - 5x^2 + x - 2)' = 12x^2 - 10x + 1.$

Лагранждын $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ *формуласын пайдаланабыз.*

$$f(2) - f(0) = (12c^2 - 10c + 1) \cdot (2 - 0),$$
$$12 - (-2) = 2 \cdot (12c^2 - 10c + 1),$$
$$12c^2 - 10c + 1 = 7,$$
$$12c^2 - 10c - 6 = 0,$$
$$6c^2 - 5c - 3 = 0, \; D = 25 + 72 = 97$$
$$c_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{12};$$

Жообу: $c = \frac{5+\sqrt{97}}{12}.$

4-мисал. $f(x) = x^3 + 2x$ *ийри сызыгынын кайсы чекиттериндеги жанымалары* $y = 5x - 3$ *түз сызыгына параллель болот?*

Чыгаруу: $y = 5x - 3$ *түз сызыгынын бурчтук коэффиценти* $k = 5$.

Демек бул түзгө параллель болгон жанымалардын да бурчтук коэффиценттери $k = 5$ *болууга тийиш.*

$f(x) = x^3 + 2x$ *функциясынын туундусун табабыз. Ал ийри сызыкка жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффиценти болот.*

$$f'(x) = (x^3 + 2x)' = 3x^2 + 2.$$

Бул туундуну 5 ке барабарлап, x ти (жаныманын абсциссасын) табабыз.

$3x^2 + 2 = 5$, *эми жаныманын ординаталарын табабыз*

$3x^2 = 5 - 2$ $\quad f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$

$3x^2 = 3$ $\quad f(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1) = -3.$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Жообу: (1;3) жана (-1;-3) чекитттерине жүргүзүлгөн жанымалар $y = 5x - 3$ түзүнө параллель болушат.

3.5.-3.6. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

64. Чекиттин кыймыл закону $s = 7t - 3$ болсо бир калыптагы түз сызыктуу кыймыл, кыймылдын ылдамдыгын тапкыла.

65. Чекит $S = 4t^2 - 2t + 3$ закону боюнча бир калыпта эмес кыймылдаса: а) $t = 6сек$; б) $t = 10сек$ болгондогу ошол чекиттин кыймылынын ылдамдыгын тапкыла.(узундук метр менен).

66. Чекиттин кыймыл закону $S = \frac{2}{3}t^3 - 5t^2 - 12t + 5$ аркылуу берилген. Убакыттын кайсыл моментинде (убакыт секунда менен) анын кыймылынын ылдамдыгы нөлгө барабар болот?

67. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ функциясынын графигинин (-2;2) чекитине жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин жазгыла.

68. Төмөнкү функциялардын графигинин обсциссасы x_0 болгон чекиттеги жанымасынын теңдемесин жазгыла.

а) $f(x) = 2sinx,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$; *б)* $f(x) = 3 + cosx,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

в) $f(x) = tgx,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$; *г)* $f(x) = -2cosx,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$;

69. Жанымалары Ox огуна параллель болгон f функциясынын чекиттерин тапкыла.

а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 16x$;

в) $f(x) = sin2x + \sqrt{3}x$;

г) $f(x) = cos(x - \frac{\pi}{3})$.

70. а) $f(x) = 3x - x^3$; *б)* $f(x) = -cosx$ *функцияларынын графиктери Ox огу менен кандай бурч боюнча кесилишет?*

71. $f(x) = x^3$ функциясынын графигинен $C(c, f(c))$ чекитин, ал чекит аркылуу өтүүчү жанымa, $A(-1;-1)$ жана $B(2;8)$ чукиттерин бириктирген хордага параллель боло тургандай кылып тапкыла.

72. $f(x) = x^3 + x$ ийри сызыгынын кайсы чекиттериндеги жанымалары $y = 4x - 3$ түз сызыгына параллель болушат?

3.7. Жогорку тартиптеги туундулар, экинчи тартиптеги туундунун механикалык мааниси.

Аныктама.

Функциянын биринчи тартиптеги туундусунан алынган туунду, берилген функциянын экинчи тартиптеги туундусу деп аталат.

Мисалы, $y = x^6$ *функциясынын биринчи тартиптеги туундусу* $y' = 6x^5$ *болот, экинчи тартиптеги туундусу* $y'' = (y')' = (6x^5)' = 30x^4$ *болот, үчүнчү тартиптеги туундусу* $y''' = (y'')' = (30x^4)' = 120x^3$ *болот. Ушундай эле жол менен жогорку тартиптеги тундуларды табууга болот.*

Тригонометриялык функциялардын жогорку тартиптеги туундулары төмөндөгүдөй формулалар менен табылат.

$y = sinx, \quad y' = (sinx)' = cosx = sin(x + \frac{\pi}{2})$

$y'' = \left(sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$ *мындан* $sinx$ *тин* n *тартибиндеги туундусу*

$y^{(n)} = (sinx)^{(n)} = sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$ *боло тургандыгы келип чыгат.*

$$(sinx)^{(n)} = sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \text{ ошондой эле}$$

$$(cosx)^{(n)} = cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \text{ болот.}$$

1-мисал. $y = sin\,x$ *жана* $y = cos\,x$ *функцияларынын 12-тартиптеги туундуларын тапкыла.*

Чыгаруу:

$$y^{12} = (sin\,x)^{(12)} = sin\left(x + 12 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = sin(x + 6\pi) = = sin\,x.$$

$$y^{(12)} = (cos\,x)^{(12)} = cos\left(x + 12 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = cos(x + 6\pi) =$$
$$= cos(x + 3 \cdot 2\pi) = cos\,x\,.$$

келтирүүнүн формулаларын пайдаландык.

2-мисал. $y = 2x^3$ *функциясынын 4-даражадагы туундусун тапкыла.*

Чыгаруу: *Даражадан туунду алуу эрежесин пайдаланабыз.*

$y' = (2x^3)' = 6x^2$

$y'' = (6x^2)' = 12x$

$y''' = (12x)' = 12$

$y^{IV} = 12' = 0.$

Нерсенин басып өткөн жолунан убакыт боюнча алынган туунду, убакыттын ошол учурдагы нерсенин ылдамдыгын бере тургандыгы бизге берилүү, б.а.

$$V(t) = S'(t)$$

Ушул ылдамдыктын убакыт боюнча алынган туундусу, кыймылдын ылдамдануусу болот, б.а.

$$V'(t) = W(t)$$

Демек нерсенин басып өткөн жолунун 2-тартиптеги туундунун мейаникалык мааниси мына ушунда.

3-мисал. Нерсенин боштуктагы эркин түшүүсүнүн кыймыл закону $S = \frac{gt^2}{2}$, *g=const барабардыгы менен аныкталат. Эркин түшүүнүн ылдамдыгын жана ылдамдануусун тапкыла.*

Чыгаруу: *Кыймыл законунан б.а.* $S = \frac{gt^2}{2}$ *тан* t *боюнча алынган туунду нерсенин* t *моментиндеги кирпик каккыча болгон ылдамдыгы болот.*

$$S'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right) = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt,$$

Демек, нерсенин ылдамдыгы $V = gt$ *болот.*

Өтүлгөн жолдун экинчи туундусу нерсенин ылдамдануусу болот.

$S''(t) = (gt)' = g$, *демек нерсенин эркин түшүүсүнүн ылдамдануусу* $a = g = 9{,}8\text{м/сек}^2$ *болот.*

Жообу: $a = 9{,}8\text{м/сек}^2$.

3.7. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

73. Чекит $x(t) = 2t^3 + t - 1$ *закону боюнча түз сызыкттуу кыймылдасын. Убакыттын* t *моментиндеги ылдамданууну тапкыла. Убакыттын кайсы моментинде ылдамдануу төмөнкүлөргө барабар болот:*

а) $1\ \text{см/сек}^2$, *б)* $2\ \text{см/с}^2$.

($x(t)$ *– сантиметр менен алынган которулуш, – убакыт секунда менен).*

74. Чекит $S(t) = -\frac{t^3}{3} + 6t^2 - 7$ закону боюнча түз сызыктууу кыймылдайт. (убакыт секунда, координата метр менен).
Төмөнкүлөрдү: а) чекиттин ылдамдануусу нөлгө барабар болгон учурдагы t убакыттын моментин; б) чекит бул моментте кандай ылдамдык менен кыймылдаарын тапкыла.

75. Чекит төмөнкү закон боюнча гармоникалык термелүү кыймылында болсо, ал чекиттин ылдамдыгын жана ылдамдануусун тапкыла.

а) $S = sin(3t - \frac{\pi}{3})$; *б)* $S = 3cos(2t + 7)$.

76. Төмөнкү функциялардын экинчи тартиптеги туундуларын тапкыла.

а) $y = x^4$; *г)* $y = sin3x$;

б) $y = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$; *д)* $y = 2cos^2x$;

в) $y = x^7 + 5x^2$; *е)* $y = 3tgx$.

3.8. Функцияны изилдоодо туундунун колдонулуштары. Функциянын өсүү (кемүү) белгиси.

1-теорема. *(Функциянын өсүшүнүн жеткиликтүү белгиси).*
Эгер J интервалынын ар бир чекитинде $f'(x) > 0$ болсо, анда f функциясы J де өсөт.

2-теорема. *(Функциянын кемишинин жеткиликтүү белгиси).*
Эгер J интервалынын ар бир чекитинде $f'(x) < 0$ болсо, анда f функциясы J де кемийт.

1-мисал. $f(x) = x - \frac{4}{3}x^3$ *функциясынын өсүүчү жана кемүүчү аралыктарын тапкыла.*
Чыгаруу: $f(x)$ *функциясынын туундусун табабыз.*

$$f'(x) = (x - \frac{4}{3}x^3)^1 = 1 - 4x^2$$

1-теорема боюнча $f'(x) > 0$ *болгон аралыкта функция өсөт. Анда* $1 - 4x^2 > 0$ *барабарсыздыгын интервалдар методу менен чыгарабыз.*

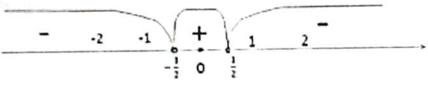
$1 - 4x^2 = 0$ *Төмөндөгүдөй интервалдарга ээ болобуз*

$4x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1}{2}$



37-сүрөт

$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ *жана* $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ *интервалдарында туунду* $1-4x^2<0$, *2-теорема боюнча бул аралыктарда функция кемүүчү;*

$\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ *аралыгында туунду* $1-4x^2>0$, *демек 1-теорема боюнча бул аралыкта функция өсүчүү.*

Жообу: $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ *интервалында өсүүчү,* $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ *жана* $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ *интервалдарында кемүүчү.*

Аныктама.

Функциянын туундусу нөлгө барабар болгон чекиттер, анын стационардык чекиттери деп аталат.

Стационардык чекиттерди табуу үчүн $f'(x)=0$ *теңдемесин чыгаруу керек, теңдеменин тамырлары монотондуулук интервалдарын табууда пайдаланылат.*
(монотондуу-өсүүчү же кемүүчү)
Стационардык чекиттерди тапкандан кийин, аларды $0x$ *огуна жайгаштырабыз. Жанаша турган интервалдарда* $f'(x)$ *туундусунун белгилерин текшеребиз.*
$f'(x)>0$ *болсо, бул интервалда функция өсүүчү,*
$f'(x)<0$ *болсо, бул интервалда функция кемүүчү болот.*
Эки жанаша турган интервалдарда $f'(x)$ *белгисин өзгөртпөсө, ал интервалдарды бириктирип, бир эле интервал катары карайбыз.*

2-мисал. $f(x)=x^3-3x$ *функциясынын монотондуулук (өсүүчү, кемүүчү) интервалдарын тапкыла.*
Чыгаруу: Функциянын туундусун табабыз

$$f'(x)=(x^3-3x)^1=3x^2-3$$

Эми станционардык чекиттерди табабыз, ал үчүн

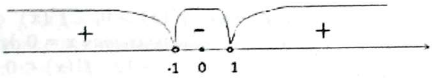
$3x^2-3=0$

$3(x^2-1)=0$

$x^2=1$

$x_1=-1$

$x_2=1$ *бул чекиттерди* $0x$ *огуна жайгаштырабыз.*

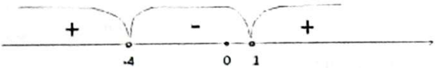


38-сурет

$(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ *жана* $1, +\infty)$ *интервалдарына ээ болдук.*
Жанаша турган $(-\infty; -1)$ *жана* $(-1; 1)$ *интервалдарында* $f'(x)$ *тин белгилерин текшеребиз*
$(-\infty; -1)$ *интервалынан* $x = -2$ *ни алалы*
$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9$
Бул интервалда туунду оң маанини алды, демек, $(-\infty; -1)$ *интервалында функция өсүүчү* $(-1; 1)$ *интервалынан* $x = 0$ *дү алалы* $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3$. $f'(0) = -3 < 0$, *демек* *(-1;1)* *интервалында функция кемүүчү анда* $(1; +\infty)$
интервалында функция өсүүчү болот.

3-мисал. Төмөнкү функциялардын монотондуулук интервалдарын таккыла.
а) $f(x) = x^3 + 4{,}5x^2 - 12x + 5$; *в)* $f(x) = x - sin2x$;
б) $f(x) = 3 + 2\sqrt{x - 7}$; *г)* $f(x) = 3x + 2cos2x$;

Чыгаруу: а) $f(x) = x^3 + 4{,}5x^2 - 12x + 5$,
$f(x)$ *тин туундусун табабыз.*
$f'(x) = 3x^2 + 9x - 12$,
Стационардык чекиттерди табабыз, ал үчүн
$3x^2 + 9x - 12 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз*
$x^2 + 3x - 4 = 0$,
$D = 3^2 + 4 \cdot 4 = 25$,
$x_{1/2} = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-3\pm5}{2}$; $x_1 = 1$; $x_2 = -4$ *бул чекиттерди* $0x$ *огуна жайгаштырабыз.*



39-сурет

$(-\infty; -4), (-4; 1)$ *жана* $(1; +\infty)$ *интервалдарына ээ болдук.*
Бул интервалдыгы $f'(x)$*ти белгилерин аныктайбыз.*
$(-\infty; -4)$ *интелвалынан* $x = -5$*ти текшерели*
$f'(-5) = 3 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) - 12 = 75 - 45 - 12 = 18.$

Демек $(-\infty;-4)$ *интервалында* $f'(x) > 0$, $f'(x)$ *функциясы бул интервалда өсүүчү;* $(-4;1)$ *интервалынан* $x = 0$ *дү алалы*

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 12 = -12, \ f'(x) < 0,$$

демек бул интервалда функция келүүчү, $(1;+\infty)$ *интерва-лында* $f'(x)$ *тин белгисин текшерсек ал оң б.а.* $f'(x) > 0$ *болот.*

Жообу: $(-\infty;-4)$ *жана* $(1;+\infty)$ *интервалындарында функция өсүүчү;* $(-4;1)$ *интервалында функция кемүүчү.*

Чыгаруу: $f(x) = 3 + 2\sqrt{x-7}$,

б) $f'(x) = (3 + 2\sqrt{x-7})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-7}} = \frac{1}{\sqrt{x-7}}, \frac{1}{\sqrt{x-7}} = 0$ *бул теңдеменин чыгарылышы жок. Демек, станционардык чекиттер да жок. Ошондуктан* $y = 3 + 2\sqrt{x-7}$ *функциясынын аныкталуу областын таап, анын өсүү кемүү аралыктарын ажыратабыз.*

Бул функция $x - 7 \geq 0$ *болгондо гана мааниге ээ болот.*

Демек, $x \geq 7$, *башкача айтканда* $[7;+\infty]$ *жарым интервалы аныкталуу областы болот. Бул аралыктагы аргументтин маанилеринде функциясынын маанилери өсүүчү экендигин байкоого болот.*

Жообу: $[7;+\infty]$ *жарым интервалында функция өсүүчү.*

в) Чыгаруу: $f(x) = x - sin2x$

Функциясынын туундусун табабыз

$f'(x) = (x - sin2x)' = 1 - 2cos2x$

Стационардык чекиттерди табабыз

$$1 - 2cos2x = 0,$$
$$2cos2x = 1,$$
$$cos2x = \frac{1}{2},$$
$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,$$

Демек, функция $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$ *интервалында өсөт.*

$(-\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6})$ *интервалында кемийт.*

Косинустун мезгилдүүлүгүн эске алсак,

Жообу: $(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{5\pi}{6} + \pi k)$ *интервалдарында өсүүчү,*

$(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{5\pi}{6} + \pi k)$ *интервалдарында кемүүчү болот.*

г) Чыгаруу: $f(x) = 3x + 2cos3x$,

$$f'(x) = (3x + 2cos3x)' = 3 - 6sin3x,$$

эми станционардык чекиттерди табабыз

$$3 - 6sin3x = 0,$$
$$6sin3x = 3,$$
$$sin3x = \frac{1}{2},$$
$$3x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$$
$$x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3};$$

Демек, функция $(-\frac{7\pi}{18}; \frac{\pi}{18})$ *интервалында өсөт* $(\frac{\pi}{18}; \frac{7\pi}{9})$ *интервалында кемийт.*

Синустун мезгилдүүлүгүн эске алсак

Жообу: $(-\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3})$ *интервалдарында өсүүчү,*

$(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{7\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3})$ *интервалдарында кемүүчү болот.*

3.9. Функциясынын сыналуучу чекиттери, анын максимумдары жана минимумдары.

Аныктама.

Функциянын туундусу нөлгө барабар болгон стационалдык чекиттерди жана функция туундуга ээ болбогон чекиттерди сыналуучу чекиттер деп айтабыз.

3-теорема. *(Экстремумдун зарыл шарты)*

Эгерде x_0 *чекити* f *функциясынын экстремум чекити болсо жана ал чекитте* f' *туундусуна ээ болсо, анда ал чекитте туунду нөлгө барабар болот:* $f(x_0) = 0$.

4-теорема. *(Функциянын максимумунун белгиси).*

Эгерде f *функциясы* x_0 *чекитинде үзгүлтүксүз жана* $(a; x_0)$ *интервалында* $f'(x_0) > 0$, *ал эми* $(x_0; b)$ *интервалында* $f'(x) < 0$ *болсо, анда* x_0 *чекити* f *функциясынын максимум чекити болот.*

5-теорема. *(Функциянын минимумунун белгиси)*

Эгерде f *функциясы* x_0 *чекитинде үзгүлтүксүз жана* $(a;)$ *интервалында* $f'(x_0) < 0$, *ал эми* $(x_0; b)$ *интервалында* $f'(x) > 0$ *болсо, анда* x_o *чекити* f *функциясынын минимум чекити болот.*

4-5-теоремалар экстремумдун 1-жетиштүү шарты болот.

4-5-теоремалардын жөнөкөйлөткөн формулировкасы төмөнкүдөй:

Эгерде x_o чекитинде туунду белгисин плюстан минуска алмаштырса, анда x_o чекити максимум чекити болот.

Эгерде x_o чекитинде туунду белгисин минустан плюска алмаштырса, анда x_o чекити минимум чекити болот.

***6-теорема.** (Эктремумдун экинчи жетиштүү шарты)*

Эгерде стационардык x_o чекитинде $f''(x_o) < 0$ болсо, функция бул чекитте максимумга, ал эми $f''(x_o) > 0$ болсо, минимумга ээ болот.

1-мисал. Төмөнкү функциялардын сыналуучу чекиттерин тапкыла.

а) $f(x) = 2 - 2x + 5x^2$ в) $f(x) = \frac{x}{5} - \frac{5}{x}$

б) $f(x) = x^3 - 3x + 5$ г) $f(x) = \sin x + \cos^2 x$

***Чыгаруу:** а)* $f(x)3 - 2x + 5x^2$

$$f'(x) = (3 - 2x + 5x^2)' = -2 + 10x$$

Эми сыналуучу чекиттерди табабыз.

$$-2 + 10x = 0,$$
$$10x = 2,$$
$$x = \frac{1}{5};$$

Жообу: Сыналуучу чекит $x = \frac{1}{5}$

б) ***Чыгаруу:*** $f(x) = x^3 - 3x + 5$

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$
$$3x^2 - 3 = 0$$
$$3x^2 = 3$$
$$x^2 = 1, \quad x_1 = -1; \ x_2 = 1$$

Жообу: Сыналуучу чекиттер: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$.

в) Чыгаруу: $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$,

$$f'(x) = \left(\frac{x}{5} + \frac{5}{x}\right)' = \frac{1}{5} - \frac{5}{x^2}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{5}{x^2} = 0, \quad x^2 - 25 = 0,$$
$$x^2 = 25$$

$x_1 = -5, \quad x_2 = 5.$

Жообу: Сыналуучу чекиттер: $x_1 = -5; \; x_2 = 5.$

г) Чыгаруу: $f(x) = sinx + cos^2 x$

$f'(x) = (sinx + cos^2 x)^1 = cosx - 2cosx \cdot sinx$

$cosx - 2cosxsinx = 0$

$cosx(1 - 2sinx) = 0$

$cosx = 0 \qquad 1 - 2sinx = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon z; \qquad 2sinx = 1$

$sinx = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^k arcsin\frac{1}{2} + \pi k$

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; k\epsilon z$

Жообу: Сыналуучу чекиттер: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon z;$

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; k\epsilon z.$

2-мисал. Төмөнкү функциялардын экстремумдарын тапкыла.

а) $f(x) = 7 + 6x - 2x^3;$ *б)* $f(x) = sinx + cosx.$

а) Чыгаруу: $f(x) = 7 + 6x - 2x^3$

Сыналуучу чекиттерди табабыз

$f'(x) = (7 + 6x - 2x^3)^1 = 6 - 6x^2,$

$6 - 6x^2 = 0,$

$6x^2 = 6,$

$x^2 = 1, \; x_1 = -1, \; x_2 = 1$

Функциясынын 2-тартиптеги туундусун табабыз.

$f''(x) = (6 - 6x^2)' = -12x.$

$f''(x)$ *тин сыналуучу чекиттерде белгилерин табабыз.*

$f''(-1) = -12 \cdot (-1) = 12 > 0,$

$f''(1) = -12 \cdot 1 = -12 < 0$ *демек, 6-теореманын негизинде* $x = 1$ *чекиттеринде функция максимумга,* $x = -1$ *чекитинде функция минимумга ээ болот.*

$f(1) = 7 + 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3 = 13 - 2 = 11,$

$f(-1) = 7 + 6 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1)^3 = 7 - 6 + 2 = 3.$

Жообу: $\underset{max}{x} = 1, \quad \underset{min}{x} = -1, \quad \underset{max}{f(1)} = 11, \quad \underset{min}{f(-1)} = 3.$

б) Чыгаруу: $f(x) = sinx + cosx,$

Сыналуучу чекиттерди табабыз.

$f'(x) = (sinx + cosx)' = cosx - sinx,$

$cosx - sinx = 0,$ *теңдемесин чыгарабыз*

$1 - \frac{sinx}{cosx} = 0,$ *(теңдеменин эки жагын* $cosx \neq 0$

$1 - tgx = 0,$ *бөлөбүз)*

$tgx = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n\epsilon z,$

Демек, сыналуучу чекиттер $x_1 = \frac{\pi}{4}; \ x_2 = \frac{5\pi}{4}$ *болот.*

Эми функциянын 2-тартиптеги туундусун табабыз.

$f''(x) = (cosx - sinx)' = -sinx - cosx.$

$f''(x)$ *тин сыналуучу чекиттердеги белгилерин аныктайбыз*

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -sin\frac{\pi}{4} - cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2};$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -sin\frac{5\pi}{4} - cos\frac{5\pi}{4} = -\left(-sin\frac{\pi}{4}\right) - cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= sin\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

Демек, $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0, \qquad f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2 > 0.$

Экстремумдун 2-жетиштүү шартынын негизинде функция $x = \frac{\pi}{4}$ *чекитинде максимумга,* $x = \frac{5\pi}{4}$ *чекитинде минимумга ээ болот.*

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sin\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = sin\frac{5\pi}{4} + cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2},$$

Жообу: $\underset{max}{x} = \frac{\pi}{4}; \ \underset{min}{x} = \frac{5\pi}{4}; \ \underset{max}{f\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}; \ \underset{min}{f\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = -\sqrt{2}.$

3.8.-3.9. Конүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

77. Функциялардын өсүүчү жана кемүүчү аралыктарын тапкыла.

а) $f(x) = 6x - 1;$ *г)* $f(x) = \frac{4}{x^2};$

б) $f(x) = 5 - 3x;$ *д)* $f(x) = x^3.$

в) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5;$

78. Төмөнкү функциялардын экстримумдарын тапкыла.

а) $f(x) = x^3 - 3x+;$ *в)* $f(x) = x - 3\sqrt{x};$

б) $f(x) = x^2(x - 2);$ *г)* $f(x) = cos2x + x.$

3.10. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери.

Аныктама.

$[a;b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгон $f(x)$ функциясынын, бул кесиндинин кандайдыр бир чекитиндеги мааниси, калган бардык чекиттериндеги маанилеринен чоң (кичине) болсо, анда бул маани $f(x)$ функциясынын $[a;b]$ кесиндисиндеги эң чоң (эң кичине) мааниси деп аталат.

1-мисал. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 5$ *функциясынын* $[0,2]$ *кесиндисиндеги эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.*

Чыгаруу: *Берилген функциянын туундусун таап, анын сыналуучу чекиттерин табабыз.*

$f'(x) = (\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 5)^1 = 2x^3 - 2x$

$2x^3 - 2x = 0$ *теңдемесин чыгарып, сыналуучу чекиттерди*

$2x(x^2 - 1) = 0$ *табабыз.*

$x_1 = 0$

$x_2 = -1$

$x_3 = 1.$ *Сыналуучу чекиттердеги экстремумду изилдейбиз, ал үчүн функциянын экинчи туундусун пайдаланабыз.*

$f''(x) = (2x^3 - 2x)' = 6x^2 - 2$

$f''(0) = -2,\ f'(\pm 1) = 4$

Демек, функция $x = 0$ *чекитинде максимумга,* $x = \pm 1$ *чекиттеринде минимумга ээ болот.*

$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^4 - 0^2 + 5 = 5$ *максимум,*

$f(\pm 1) = \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 + 5 = 4\frac{1}{2}$ *минимум,*

эми функциянын кесиндинин учтарындагы маанилерин эсептейбиз.

$f(0) = 5;\ f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 2^2 + 5 = 8 - 4 + 5 = 9.$

Жообу: *Функциянын эң чоң мааниси кесиндинин* $x = 2$ *чекитинде 9 га барабар эң кичине маани* $x = \pm 1$ *ички чекиттерде 4,5 ке барабар.*

2-мисал. $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ *функциясынын* $[1;3]$ *аралыгында эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.*

Чыгаруу: *Сыналуучу чекиттерди табабыз*

Ал үчүн: $f' = (\frac{x^2+4}{x})^1 = \frac{(x^2+4)^1 \cdot x - x^1(x^2+4)}{x^2} = \frac{2x^2-x^2-4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$,

туундусун таап, $\frac{x^2-4}{x^2} = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$x \neq 0$ *шарты менен* $x^2 - 4 = 0$ $(x-2)(x+2) = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$x - 2 = 0, \ \ x + 2 = 0, \ \ x_1 = 2, x_2 = -2$

Экстремум ччекиттерин 2-туунду аркылуу издейбиз.(6-теореманын негизинде)

$f''(x) = \left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)' = \frac{(x^2-4)^1 x^2 - (x^2)^1(x^2-4)}{x^4} = \frac{2x^3-2x^3+8x}{x^4} = \frac{8x}{x^4} = \frac{8}{x^3}$

$f''(2) = \frac{8}{x^3} = \frac{8}{8} = 1;$ $x = -2$ *сыналуучу чекити каралып жаткан аралыкка тиешелүү эмес* $x = 2$ *жана кесиндинин учтарында функциянын маанилерин эсептейбиз.*

$f(1) = \frac{1^2+4}{1} = \frac{1+4}{1} = 4, \quad f(3) = \frac{3^2+4}{3} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}.$

$f(2) = \frac{2^2+4}{2} = \frac{4+4}{2} = 4.$

Жообу: Демек функциянын эң кичине мааниси 4, эң чоң мааниси $4\frac{1}{3}$.

3-мисал. Материалдык чекит $s(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$ *закону боюнча түз сызыктуу кыймылда болот. Убакыттын* $[4,10]$ *аралыгынын кайсы моментинде чекиттин ылдамдыгы эң чоң болот жана ал ылдамдыктын чоңдугу кандай болот?*

(жол-метр менен, убакыт секунда менен)

Чыгаруу: *Өтүлгөн жолдон убакыт боюнча алынган туунду ылдамдык болот.*

$$S'(t) = (12t^2 - \frac{2}{3}t^3)^1 = 24t - 2t^2$$

Демек, $\vartheta(t) = 24t - 2t^2$ *закону менен туюнтулат.*

Ылдамдыктан убакыт боюнча алынган туунду ылдамдануу болот башкача айтканда.

$$\vartheta'(t) = (24t - 2t^2)' = 24 - 4t$$

демек, ылдамдануу $a(t) = 24 - 4t$ *болот ылдамдык эң чоң маанини алган учурда ылдамдануу нөлгө барабар болот.*

Мындан $24 - 4t = 0$ *боло тургандыгы келип чыгат.*

$4t = 24, t = 6c$ *демек, 6-секундада ылдамдануу нөл болот.*

$\vartheta(t) = 24t - 2t^2$ *формуласынан* $t = 6c$ *болгондогу* $\varphi(t)$ *нын маанисин таап алабыз*

$$\vartheta(6) = 24 \cdot 6 - 2 \cdot 6^2 = 144 - 72 = 72 \text{ м/с}$$

Жообу: $t = 6c, \quad \vartheta = 72$*м/с*

4-мисал. 9 санын көбөйтүндүсү эң чоң болгондой кылып терс эмес эки сандын суммасы түрүндө көрсөткүлө.

Чыгаруу: Изделүүчү сандардын бирин x *деп алалы. Анда экинчи сан* $9 - x$ *болот. Бул сандардын көбөйтүндүсү* $x \cdot (9 - x)$ *туюнтмасы болот. Эгерде бул туюнтманы* x *ке карата функция деп алсак, анда* $f(x) = x(9 - x)$ *функциянын* $[0; 9]$ *кесиндисинде эң чоң маанисин табуу маселесине келебиз.* $f'(x) = (x(9 - x))' - (9x - x^2)' = 9 - 2x$.

Сыналуучу чекиттерди табабыз

$$9 - 2x = 0, \quad 2x = 9,$$

$x = 4{,}5$ *демек,. изделүүчү сандын бири 4,5 саны, анда экинчи сан 9-4,5=4,5 болот.*

Жообу: 4,5 жана4,5 сандары.

5-мисал. Тик бурчтуктун аянты 36см^2. *Периметри эң кичине болсун үчүн, анын жактарынын узундуктары кандай болууга тийиш.*

Чыгаруу: Тик бурчтуктун жактарынын бирин x *см деп ала турган болсок, анда экинчи жагы* $\frac{36}{x}$ *см болот.*

Тик бурчтуктун периметри $P = 2a + 2b$ *формуласы боюнча эсептелет. Демек берилген маселени* $f(x) = 2x + 2 \cdot \frac{36}{x}$ *функциясынын эң кичине маанисин табууга алып келебиз.* $f'(x) = (2x + \frac{72}{x})^1 = 2 - \frac{72}{x^2}$,

$$2 - \frac{72}{x^2} = 0, \qquad \frac{2x^2 - 72}{x^2} = 0,$$

$$2x^2 - 72 = 0, \quad 2x^2 = 72, \quad x^2 = 36, \quad x_1 = -6, \quad x_2 = 6$$

Демек тик бурчтуктун бир жагы 6см, экинчи жагы $\frac{36}{6} = 6\text{см}$ *болот.* *Жообу: Жагы 6см болгон квадрат.*

6-мисал. Радиусу 9см болгон шардын ичине сызылган конустардын ичинен эң чоң көлөмдүүсүн тапкыла.

Чыгаруу: Шардын ичине сызылган конусту чийип алабыз. Чийме боюнча белгилөөлөрдү жүргүзөбүз.

$OA = R = 9\text{см}$*-шардын радиусу,* $OO_1 = x$*-шардын борборунан конустун негизинин борборуна чейинки аралык.*

$O_1C = r = R^2 - x^2$-конустун негизинин радиусу (Пифагордун теоремасы боюнча табылды)
$O_1A = R + x$-Конустун бийиктиги.
Конустун көлөмү $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$ формуласы боюнча эсептелет. Жогорудагы белгилөөлөрдү формулага коёбуз.
$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(R + x) = \frac{1}{3}\pi(9^2 - x^2)(9 + x)$
Демек, аргументи x болгон $V(x) = \frac{1}{3}\pi(729 + 81x - 9x^2 - x^3)$ функциясына ээ болдук. Бул функциянын кайсы учурда эң чоң мааниге ээ болушун табабыз. Функциянын туундусун табабыз
$V'(x) = (\frac{1}{3}\pi(729 + 81x - 9x^2 - x^3))^1 = \frac{1}{3}\pi(81 - 18x - 3x^2)$,
Сыналуучу чекиттерди табабыз.

$81 - 18x - 3x^2 = 0$, *Теңдеменин эки жагын тең-3кө*

$x^2 + 6x - 27 = 0$, *бөлдүк.*

$D = 36 + 4 \cdot 27 = 144$,

$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-6 \pm 12}{2}$; $x_1 = \frac{-6+12}{2} = \frac{6}{2} = 3$,

$x_2 = \frac{-6-12}{2} = \frac{-18}{2} = -9$.

Демек, $x = 3$см болгондо конустун көлөмү эң чоң болот.
Жообу: Шардын борбору менен конустун негизинин борборунун аралыгы 3см, Конустун радиусу $r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{81 - 9} = \sqrt{72}$см, Конустун бийиктиги $H = R + x = 9 + 3 = 12$ см болгондо берилген конус эң чоң көлөмгө ээ болот.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 72 \cdot 12 \approx 864\text{см}^3.$$

3.10. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

79. Төмөнкү функциялардын көрсөтүлгөн кесиндилерди эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.

а) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5, [0; 2]$;
б) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 24x + 7$, $[-2; 4]$;
в) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6; 8]$;
г) $f(x) = cos3x - 3cosx$, $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$.

80. Радиусу r *болгон шардын ичине сызылган туура үч бурчтуу призмалардын ичинен эң чоң көлөмдөгүсүн тапкыла. (41-сүрөттү пайдалангыла)*

81. Эки сандын айырмасы 8 ге барабар. Ал сандардын биринчисинин кубунун экинчисине болгон көбөйтүндүсү эң кичине болсун үчүн, бул сандар кандай болууга тийиш?

82. Чети ачык, көлөмү $10\ \text{см}^3$ *болгон цилиндр формуласындагы идиш жасоо керек. Ал идишти жасоого кеткен материал эң аз болсун үчүн идиштин өлчөмдөрү кандай болууга тийиш?*

83. Бургулоочу мунара шоссенин эң жакынкы чекитинен 9 км аралыкта талаада жайланышкан. Шоссдеги айтылган чекиттен (шоссе түз сызык) 15 км аралыкта жайланышкан кыштакка бургулоочу мунарадан чабарман жиберүү керек. Велосипед минген чабармандын талаадагы ылдамдыгы $8\ \text{км/саат}$*, ал эми шосседеги ылдамдыгы* $10\ \text{км/саат}$*. Эң аз убакытта кыштакка жетүү үчүн, ал шоссенин кайсы чекитинен чыгуу керек?*

84. Кандайдыр бир сан менен анын квадратынын суммасы эң кичине мааниге ээ болсун үчүн, ал сан кандай болушу керек?
85. Берилген гипотенузалуу бардык тик бурчтуу үч бурчтуктардын ичинен тең капталдуусу эң чоң аянтка ээ болорун далилдегиле.

86. Айланага ичтен сызылган бардык тик бурчтуктардын ичинен, эң чоң аянтка ээ болгонун тапкыла.

87. Чекиттин окко карата айлануу кыймылы
$\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$ *закону боюнча болот. Убакыттын* t *моментиндеги жана* $t = 4$ сек *болгондугу* $w(t)$ *бурчтук ылдамдыгын тапкыла.*
($\varphi(t)$*– буруллуу бурчу радиан менен,* w *(бурчтук ылдамдыгы* $\frac{\text{рад}}{\text{сек}}$ *менен өлчөнөт)*

88. Чекит $S(t) = 18t + 9t^2 - t^3$ *закону боюнча кыймылдайт. Анын эң чоң ылдамдыгын тапкыла.*
$(t - \text{сек},\ S - \text{м.})$

89. Зениттик куралдан жогору карай багытта $V_0 = 200\ \text{м/сек}$ *баштагыч ылдамдык менен снаряд атылды. Убакыттын* $t = 15\ \text{сек}$ *моменттеринде снаряд жогору көтөрүлөбү же төмөн түшөбү?*

3.11. Функцияны изилдөө жана анын графигин түзүү.

Функцияны изилдөө жана анын графигин түзүү төмөнкүдөй схема боюнча жүргүзүлөт.

1. Функциянын аныкталуу областын табуу.

2. Функциянын жуп же так экендигин тактоо.

3. Функциянын мезгилдүүлүгүн аныктоо.

4. Туундунун жардамы менен функциянын өсүү, кемүү (монотондуулук) интервалдарын табуу. Мында эки саналуучу чекит аркылуу түзүлгөн интервал монотондуулук интервалы болорун эске алуу керек.

5. Экстремумдун зарыл жана жетиштүү шарттарын пайдаланып, функциянын максимум жана минимумдарын табуу.

6. Функция берилген кесиндинин учтарындагы анын маанилерин эсептөө.

7. Функциянын графигинин координаталык октор менен кесилишкен чекиттерин табуу.

1-мисал. Төмөнкү функциялардын изилдеп, графиктерин түзгүлө.

$$а)\ f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3; \quad б)\ f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

Бул функцияларды, функцияны изилдөө жана графигин түзүү схемасы боюнча изилдейбиз.

а) Чыгаруу: 1. Аныкталуу областын табабыз.

$D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Жуп же тактыгын аныктайбыз.

$$f(-x) = \frac{2}{3}(-x)^3 + \frac{1}{2}(-x)^2 - 3\cdot(-x) + 3 = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 3$$

Демек, $f(-x) \neq f(x)$, *функция жуп эмес,*

$f(-x) \neq -f(x)$, *функция так да эмес.*

3. Мезгилдүүлүгүн аныктайбыз.

$$f(x+t) = \frac{2}{3}(x+t)^3 + \frac{1}{2}(x+t)^2 - 3(x+t) + 3,$$

демек, $f(x+t) \neq f(x)$ *бул функция мезгилдүү эмес.*

4. Функциянын сыналуучу чекиттерин табабыз.

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3\right)' = 2x^2 + x - 3.$$

$$2x^2 + x - 3 = 0,\ D = 1 - 2\cdot 4\cdot(-3) = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{4} = \frac{-1\pm 5}{4}; \quad x_1 = \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1; \quad x_2 = \frac{-1-5}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

5. $f''(x)$ *тин жардамы менен функциянын экстремумун табабыз.*

$f''(x) = (2x^2 + x - 3) = 4x + 1$

$f''(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$, *демек,* $x = 1$ *чекитинде функция минимумга ээ болот.*

$f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = -6 + 1 = -5,$ *демек* $x = -\frac{3}{2}$ *чекитинде максимумга ээ болот.*

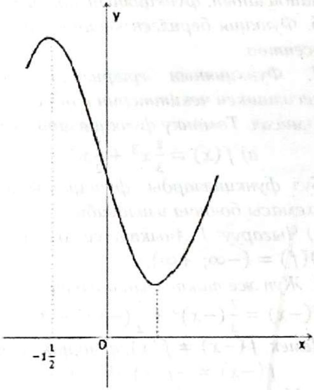
$$\underset{max}{f\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 = 6\frac{3}{6}$$

$$\underset{min}{f(1)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 3 + 3 = 1\frac{1}{6}.$$

7. Функциянын графигин координаталар огу менен кесилишкен чекиттерин табабыз.

$f(0) = \frac{2}{3}0^3 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 3 = 3$

демек, график ордината огу менен (0; 3) чекитинде кесилишет. Функциянын болжолдуу графиги 42-сүрөттөгүдөй болот.



42-сүрөт

б) Чыгаруу: $f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^4$;

1. Аныкталуу областы: $D(f) = (-\infty; +\infty)$

2. Жуп, жактыгын аныктайбыз.

$f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{4}(x)^4 = -x^3 - \frac{1}{4}x^4$;

$f(-x) \neq f(x)$, *функция жуп эмес;*

$f(-x) \neq -f(x)$, *функция так да эмес.*

3. Мезгилдүүлүгүн аныктайбыз.

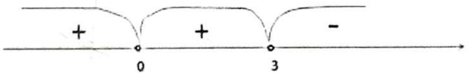
$f(x+\mathrm{T}) = (x+\mathrm{T})^3 - \frac{1}{4}(x+\mathrm{T})^4$, *демек,* $f(x+\mathrm{T}) \neq f(x)$ *бул функция мезгилдүү эмес.*

4. Туундунун жардамы менен өсүү, кемүү аралыктарын табабыз.

$f(x)' = \left(x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)' = 3x^2 - x^3$

$3x^2 - x^3 = 0$ *сыналуучу чекиттерди табабыз.*

$x^2(3-x) = 0, \quad x_1 = 0; \ x_2 = 3$



$(-\infty; 0)$; $(0; 3)$; $(3; +\infty)$ *аралыктарына ээ болобуз.*

$(-\infty; 0)$ жана $(0; 3)$ *аралыктарында* $f(x)' > 0$, *демек функция* $(-\infty; 3)$ *аралыгында өсүүчү,* $(3; +\infty)$ *аралыгында* $f(x)' < 0$, *бул аралыкта функция кемүүчү.*

5. $f''(x)$ *тин жардамы менен функциянын экстремумун аныктайбыз.*

$f''(x) = (3x^2 - x^3)' = 6x - 3x^2$, *сыналуучу чекиттердеги* $f''(x)$ *тин белгилерин аныктайбыз.*

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 0$$

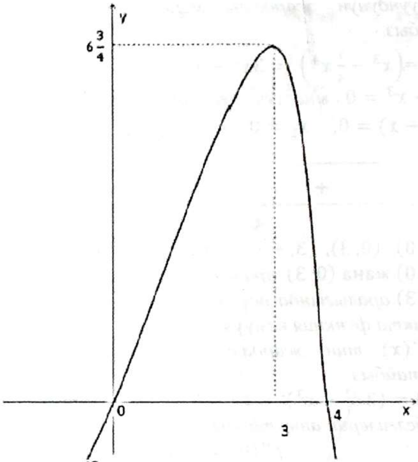
$f''(3) = 6 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2 = 18 - 27 = -9$ *демек,* *x=3* *чекитинде функция максимумга ээ болот.*

6. $f(3) = 6\frac{3}{4}$;

$f(0) = 0^3 - \frac{1}{4}0^4 = 0$

$$x^3 - \frac{1}{4}x^4 = 0, \qquad x_1 = 0, \ x_2 = 4.$$

демек, функциянын графиги x=0 жана x=4 чекиттеринде Ox огу менен кесилишет.



43-сүрөт

3.11. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар.

90. Төмөнкү функцияларды изилдегиле жана графигин түзгүлө.

а) $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$; *б)* $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

IV глава. Көнүгүүлөр үчүн берилген тапшырмалардын чыгарылыштары жана жооптору.

1. Чыгаруу:

а) $225^0 = 225 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$; $\quad 30^0 = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$;

$390^0 = 390 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{13\pi}{6}$;

б) $85^0 = 85 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{17\pi}{36}$; $\quad 405^0 = 405 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{9\pi}{4}$;

$540^0 = 540 \cdot \frac{\pi}{180} = 3\pi$.

2. Чыгаруу:

а) $\frac{5\pi}{18} = \frac{5}{18} \cdot 180^0 = 50^0$; $\quad \frac{4\pi}{9} = \frac{4}{9} \cdot 180^0 = 80^0$;

$\frac{\pi}{5} = \frac{1}{5} \cdot 180^0 = 36^0$.

б) $\frac{7\pi}{6} = \frac{7}{6} \cdot 180^0 = 210^0$; $\quad \frac{5\pi}{12} = \frac{5}{12} \cdot 180^0 = 75^0$;

$\frac{9\pi}{10} = \frac{9}{10} \cdot 180^0 = 162^0$.

3. Чыгаруу: $cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$ *теңдештигин пайдаланабыз.*

а) $\left(\frac{\sqrt{31}}{7}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{18}}{7}\right)^2 = \frac{31}{49} + \frac{18}{49} = \frac{49}{49} = 1$ *болот;*

б) $(-0{,}6)^2 + (0{,}8)^2 = 0{,}36 + 0{,}64 = 1$ *болот;*

в) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} + \frac{16}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ *болбойт;*

г) $\left(\frac{7}{9}\right)^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{49}{81} + \frac{25}{81} = \frac{74}{81}$ *болбойт.*

4. Чыгаруу: $ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\propto}{1-cos\propto}}$ *формуласын пайдаланып,* $cos\alpha$ *ны таап алабыз.* $ctg\frac{\alpha}{2} = 3$; *демек* $\sqrt{\frac{1+cos\propto}{1-cos\propto}} = 3$ *барабардыктын эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.*

$\frac{1+cos\propto}{1-cos\propto} = 9$, $1 + cos \propto = 9 - 9cos \propto$, $10cos \propto = 8$, $cos \propto = \frac{4}{5}$.

Эми $sin\alpha$ *ны* $sin\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2 \propto}$ *формуласы менен табабыз.*

$sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$;

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}; \quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Жообу: $\sin\alpha = \frac{3}{5}; \ \cos\alpha = \frac{4}{5}; \ tg\alpha = \frac{3}{4}; \ ctg\alpha = \frac{4}{3}.$

5. *Чыгаруу:* $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \ \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ *формулаларын пайдаланабыз жана IV чейректе* $\sin\alpha < 0$ *жана* $\cos\alpha > 0$, $tg\alpha < 0$ *боло тургандыгын эске алабыз.*

а) $\cos\alpha = \frac{3}{5}; \ \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5};$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = +\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = +\sqrt{\frac{1}{5}} = +\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{+\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}; \quad ctg\frac{\alpha}{2} = -2.$$

Жообу: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \ \cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \ tg\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}; \ ctg\frac{\alpha}{2} = -2.$

б) α *бурчу* $180^0 < \alpha < 270^0$, *III чейректе жатат, анда* $\frac{\alpha}{2}$ *бурчу* $90^0 < \frac{\alpha}{2} < 135^0$ *II чейректе жатат. Бул чейректеги функциялардын белгилерин эске алабыз.*

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{5}{13}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{18}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{5}{13}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{8}{13}}{2}} = -\sqrt{\frac{4}{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}},$$

6. *Чыгаруу:* : $tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ *формуласын пайдаланабыз.*

$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{1-cos\propto}{1+cos\propto}}=\frac{1}{3}$ *барабардыктын эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.*

$\frac{1-cos\propto}{1+cos\propto}=\frac{1}{9}$,

$9-9cos\propto=1+cos\propto$,

$-10cos\propto=-8$,

$cos\propto=\frac{-8}{-10}=\frac{4}{5}$; *демек* $cos\propto=\frac{4}{5}$;

эми $sin\alpha$ *ны* $sin\alpha=\pm\sqrt{1-cos^2\propto}$ *формуласы менен табабыз.*

$sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$;

Эми $\frac{5sin\alpha}{7-5cos\alpha}$ *туюнтмасынын маанисин табабыз.*

$$\frac{5\cdot\frac{3}{5}}{7-5\cdot\frac{4}{5}}=\frac{3}{7-4}=\frac{3}{3}=1.$$

7. *Чыгаруу:* $sin\alpha\pm sin\beta=2sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$ *формуласын колдонобуз.*

а) $sin17^0+sin11^0=2sin\frac{17+11}{2}cos\frac{17-11}{2}=2sin14^0cos3^0$;

б) $sin8x-sin4x=2sin\frac{8x-4x}{2}cos\frac{8x+4x}{2}=2sin2xcos6x$; ;

в) $1-2cos\alpha=cos^2\frac{\alpha}{2}+sin^2\frac{\alpha}{2}-2\left(cos^2\frac{\alpha}{2}+sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=cos^2\frac{\alpha}{2}+sin^2\frac{\alpha}{2}-2cos^2\frac{\alpha}{2}+2sin^2\frac{\alpha}{2}=3sin^2\frac{\alpha}{2}-cos^2\frac{\alpha}{2}=$

$=3sin^2\frac{\alpha}{2}-\left(1-sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=3sin^2\frac{\alpha}{2}-1+sin^2\frac{\alpha}{2}=$

$=4sin^2\frac{\alpha}{2}-1=\left(2sin\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(2sin\frac{\alpha}{2}+1\right)$;

г) $1+sinx+cosx=2cos^2\frac{x}{2}+2sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}=$

$=2cos\frac{x}{2}\left(cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right)=2cos\frac{x}{2}\left(cos\frac{x}{2}+cos\left(90^0-\frac{x}{2}\right)\right)=$

$=2cos\frac{x}{2}\left(2cos\frac{\frac{x}{2}+90^0-\frac{x}{2}}{2}\cdot cos\frac{\frac{x}{2}-90^0+\frac{x}{2}}{2}\right)=$

$=4cos\frac{x}{2}\cdot cos45^0\cdot cos\left(\frac{x}{2}-45^0\right)=4cos\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot cos\left(\frac{x}{2}-45^0\right)=$

$=2\sqrt{2}\cdot cos\frac{x}{2}\cdot cos\left(\frac{x}{2}-45^0\right)$;

д) $sin\alpha + cos2\alpha + sin3\alpha + cos4\alpha =$

$$= sin\alpha + sin3\alpha + cos2\alpha + cos4\alpha =$$

$$= 2sin2 \propto \cdot\, cos\alpha + 2cos3\alpha \cdot cos\alpha = 2cos\alpha(sin2 \propto + cos3\alpha) =$$

$$= 2cos\alpha\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - 2 \propto\right) + cos3\alpha\right) =$$

$$= 2cos\alpha \cdot 2cos\frac{\frac{\pi}{2} - 2 \propto + 3\alpha}{2} \cdot cos\frac{\frac{\pi}{2} - 2 \propto - 3\alpha}{2} =$$

$$= 4cos\alpha \cdot 2cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\propto}{2}\right) \cdot 2cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\propto}{2}\right);$$

е) $sinx - cosy = sinx - sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 2sin\frac{x - \frac{\pi}{2} + y}{2} \cdot cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - y}{2} =$

$= 2sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot cos\left(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$

8. *Чыгаруу:* *а)* $sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha$ *формуласын пайдаланабыз.*

$cos^2\frac{\pi}{12} \cdot sin^2\frac{\pi}{12} = \left(\frac{1}{2}sin2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}sin\frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16};$

б) $2sin22^0 30' \cdot sin67^0 30' = 2sin22^0 30' \cdot cos(90^0 - 22^0 30') =$

$2sin22^0 30' \cdot cos\, 22^0 30' = sin2 \cdot 22^0 30' = sin45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2};$

в) $cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ *формуласын колдонобуз.*

$cos115^0 + cos65^0 = 2cos\frac{115^0 + 65^0}{2}cos\frac{115^0 - 65^0}{2} =$

$= 2\,cos\,90^0 \cdot cos25^0 = 2 \cdot 0 \cdot cos25^0 = 0;$

г) $sin75^0 + sin15^0 = 2sin\frac{75^0 + 15^0}{2}cos\frac{75^0 - 15^0}{2} =$

$$= 2sin45^0 \cdot cos30^0 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

9. *а) Чыгаруу:* $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$, $sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$, $cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + cos\alpha$ *формулаларын пайдаланабыз.*

$cos4\alpha + 4cos2\alpha + 3 = 8cos^4\alpha;$

$$cos^2 2 \propto - sin^2 2 \propto + 4cos2 \propto + 3 =$$

$$= cos^2 \propto -(1 - cos^2 2 \propto) + 4cos2 \propto + 3 =$$

$$= cos^2 2 \propto - 1 + cos^2 2 \propto + 4cos2 \propto + 3 =$$

$$= 2cos^2 2 \propto + 4cos^2 2 \propto + 2 = 2(cos^2 2 \propto + 2cos2 \propto + 1) =$$

$$= 2(cos2 \propto + 1)^2 = 2 \cdot (2cos^2 \propto)^2 = 2 \cdot 4cos^4 \propto = 8cos^4 \propto;$$

б) Бул теңдештикти далилдөөдө синус, косинус үчүн кошуунун формулаларын, эки эселенген бурчтун формулаларын, кашааларды ачуу,топтоштуруу сыяктуу өзгөртүп түзүүлөрдү пайдаланабыз.

$4(sin3\alpha cos^3\alpha + cos3\alpha sin^3\alpha) = 3sin4\alpha;$

$$4[sin(2\propto+\propto)\cdot cos^3\propto + cos(2\propto+\propto)\cdot sin^3\propto] =$$
$$= 4[(sin2\propto\cdot cos\propto + cos2\cdot sin\propto)cos^3\propto + (cos2\propto\cdot cos\propto - sin2\propto\cdot sin\propto)sin^3\propto] =$$
$$= 4\left(sin2\propto\cdot cos^4\propto - sin2\propto sin^4\propto\right) +$$
$$+(cos2\propto sin\propto cos^3\propto + cos2\propto\cdot cos\propto\cdot sin^3\propto - sin2\propto sin^4\propto) =$$
$$= 4[(sin2\propto\cdot cos^4\propto - sin2\propto sin^4\propto)$$
$$+ (cos2\propto sin\propto cos^3\propto + cos2\propto\cdot cos\propto\cdot sin^3\propto)] =$$
$$= 4[sin2\propto(cos^4\propto - sin^4\propto) + cos2\propto\cdot sin\propto\cdot cos\propto(cos^2\propto - sin^2\propto)] =$$
$$= 4\left[sin2\propto(cos^2\propto - sin^2\propto) + cos2\propto\cdot\frac{1}{2}sin2\propto\right] =$$
$$= 4\left[sin2\propto\cdot cos2\propto + \frac{1}{4}sin4\propto\right] = 4\left[\frac{1}{2}sin4\propto + \frac{1}{4}sin4\propto\right] =$$
$$= 4\cdot\frac{3}{4}sin4\propto = 3sin4\propto$$

Теңдештик далилденди.

в)Бул теңдештикти далилдөөдө

$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ *формуласын пайдаланабыз.*

$sin105^0 + sin15^0 = 2sin\frac{105^0+15^0}{2}cos\frac{105^0-15^0}{2} =$

$= 2sin60^0\cdot cos45^0 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};$

г) $1 + cos2\alpha = cos^2\propto + sin^2\propto + cos^2\propto - sin^2\propto = 2cos^2\alpha;$

д) $cos^2\alpha\cdot cos^2\beta(tg^2\alpha - tg^2\beta) = cos^2\alpha\cdot cos^2\beta\cdot\left(\frac{sin^2\propto}{cos^2\propto} - \frac{sin^2\beta}{cos^2\beta}\right) =$

$= cos^2\alpha\cdot cos^2\beta\cdot\frac{sin^2\propto\cdot cos^2\beta - sin^2\beta\cdot cos^2\propto}{cos^2\propto\cdot cos^2\beta} =$

$$= sin^2\propto\cdot cos^2\beta - sin^2\beta\cdot cos^2\propto = sin^2\propto\left(1 - sin^2\beta\right) -$$
$$-sin^2\beta(1 - sin^2\propto) = sin^2\propto - sin^2\propto\cdot sin^2\beta - sin^2\beta +$$

$+sin^2\beta\cdot sin^2\propto = sin^2\propto - sin^2\beta;$

е)Сумманы көбөйтүндүгө өзгөртүп түзүү формуласын колдонобуз.

$(sin3\alpha + sin5\alpha)^2 + (cos3\alpha + cos5\alpha)^2 =$

$$= \left(2sin\frac{3\alpha+5\alpha}{2}\cdot cos\frac{3\alpha-5\alpha}{2}\right)^2 + \left(2cos\frac{3\alpha+5\alpha}{2}\cdot cos\frac{3\alpha-5\alpha}{2}\right)^2 =$$
$$= 4sin^2 4\propto\cdot cos^2\propto + 4cos^2 4\propto\cdot cos^2\propto = 4cos^2\alpha(sin^2 4\propto + cos^2 4\propto) =$$
$$= 4cos^2\propto.$$

10. а) Чыгаруу: $\frac{sin35^0\cdot cos25^0+sin55^0\cdot sin25^0}{cos17^0\cdot cos13^0-cos73^0\cdot cos77^0} =$

$$= \frac{sin35^0\cdot cos25^0+sin(90^0-35^0)\cdot sin25^0}{cos17^0\cdot cos13^0-cos(90^0-17)\cdot cos\quad(90^0-13^0)} = \frac{sin(35+25^0)}{cos(17^0+13^0)} = \frac{sin60^0}{cos30^0} =$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1;$$

б) $\frac{sin4\alpha-sin5\alpha+sin6\alpha}{cos4\alpha-cos5\alpha+cos6\alpha} = \frac{sin4\alpha+sin6\alpha-sin5\alpha}{cos4\alpha+cos6\alpha-cos5\alpha} =$

$$= \frac{2sin\frac{4\alpha+6\alpha}{2}\cdot cos\frac{4\alpha-6\alpha}{2}-sin5\alpha}{2cos\frac{4\alpha+6\alpha}{2}\cdot cos\frac{4\alpha-6\alpha}{2}-cos5\alpha} == \frac{2sin5\alpha\cdot cos\alpha-sin5\alpha}{2cos5\alpha cos\alpha-cos5\alpha} = \frac{sin5\alpha(2cos\alpha-1)}{c\ \ s5\alpha(2cos\alpha-1)} =$$
$$= \frac{sin5\alpha}{cos5\alpha} = tg5\alpha.$$

в) $\frac{cos7\alpha-cos3\alpha}{sin7\alpha-sin3\alpha} = \frac{-2sin\frac{7\alpha+3\alpha}{2}\cdot sin\frac{7\alpha-3\alpha}{2}}{2sin\frac{7\alpha-3\alpha}{2}\cdot cos\frac{7\alpha+3\alpha}{2}} = \frac{-2sin5\alpha\cdot sin2\alpha}{2sin2\alpha\cdot cos5\alpha} = -\frac{sin5\alpha}{cos5\alpha} =$

$$= -tg5\alpha;$$

г) $(sin^2t + 2sint\cdot cost - cos^2t)^2 = (sin^2t - cos^2t + 2sint\cdot cost)^2 = (-cos2t + sin2t)^2 = cos^2 2t - 2sin2tcos2t + sin^2 2t = cos^2 2t + sin^2 2t - sin4t = 1 - sin4t.$

11. Чыгаруу: а) $\sqrt{\frac{1+sin\alpha}{1-sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-sin\alpha}{1+sin\alpha}} = \frac{\sqrt{1+sin\alpha}}{\sqrt{1-sin\alpha}} - \frac{\sqrt{1-sin\alpha}}{\sqrt{1+sin\alpha}} =$

$$= \frac{\sqrt{1+sin\alpha}\cdot\sqrt{1+sin\alpha}-\sqrt{1-sin\alpha}\sqrt{1-sin\alpha}}{\sqrt{1-sin\alpha}\cdot\sqrt{1+sin\alpha}} = \frac{\sqrt{(1+sin\alpha)^2}-\sqrt{(1-sin\alpha)^2}}{\sqrt{1-sin^2\alpha}} =$$
$$= \frac{1+sin\alpha-1+sin\alpha}{\sqrt{cos^2\alpha}} = \frac{2sin\alpha}{cos\alpha} = 2tg\alpha;$$

б) $\frac{\sqrt{1-sin^2\alpha}}{sin\alpha} = \frac{cos\alpha}{\sqrt{1-cos^2\alpha}}$ *бул теңдештикти пропорция түрүндө кароого болот.*

Пропорциянын негизги касиетин пайдаланабыз.

$$\sqrt{1-sin^2\alpha}\cdot\sqrt{1-cos^2\alpha} = sin\alpha\cdot cos\alpha$$

$\sqrt{cos^2\alpha}\cdot\sqrt{sin^2\alpha} = cos\alpha\cdot sin\alpha$
Барабардык далилденди.

в) $sin^2\alpha + cos^4\alpha - 1 = -2sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha$ *бул барабардыкты далилдөө үчүн, анын оң жана сол бөлүктөрүнүн айырмасы нөлгө барабар боло тургандыгын көрсөтөбүз.*
$sin^4\alpha + cos^4\alpha - 1 - (-2sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha) = (sin^4\alpha + 2sin^2\alpha\cdot$
$\cdot cos^2\alpha + cos^4\alpha) - 1 = (sin^2\alpha + cos^2\alpha)^2 - 1 = 1 - 1 = 0.$
Барабардык далилденди.

12. Чыгаруу: Аргументтин берилген маанилерин формулага коюп, эсептөө жүргүзөбүз.

а) $f(-1) = (-1)^2 - \frac{1}{-1} = 1 + 1 = 2;$

$f(2) = 2^2 - \frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2};$ $\qquad f(5) = 5^2 - \frac{1}{5} = 24\frac{4}{5}.$

б) $f(0) = \sqrt{2\cdot 0^2 - 0} = \sqrt{0} = 0;$ $\quad f(1) = \sqrt{2\cdot 1^2 - 1} = \sqrt{1} = 1.$

$f(3) = \sqrt{2\cdot 3^2 - 3} = \sqrt{18 - 3} = \sqrt{15}.$

в) $f(-2) = \frac{2\cdot(-2)+3}{(-2)^2+1} = \frac{-4+3}{4+1} = -\frac{1}{5};$ $f(0) = \frac{2\cdot 0+3}{0^2+1} = \frac{3}{1} = 3;$

$f(4) = \frac{2\cdot 4+3}{4^2+1} = \frac{11}{17}.$

г) $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cdot tg2\cdot\frac{\pi}{8} - 3 = 2tg\frac{\pi}{4} - 3 = 2\cdot 1 - 3 = -1;$

$f(0) = 2\cdot tg2\cdot 0 - 3 = 2tg0 - 3 = 2\cdot 0 - 3 = -3;$

$$f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2tg2\cdot\frac{3\pi}{8} - 3 = 2tg\frac{3\pi}{4} - 3 = 2\cdot(-1) - 3 =$$

$$= -2 - 3 = -5.$$

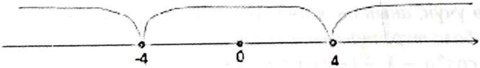
13. Чыгаруу: Бул функциялар рационал бөлчөктүү туюнтмалар. Алардын бөлүмдөрү өзгөрмөнүн кайсы маанисинде нөлгө айланышын таап алабыз да, ал сандарды аныкталуу областка кийиребиз.

а) $\frac{3x-7}{x^2-16}$, $x^2 - 16 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз*

$(x - 4)(x + 4) = 0$

$x - 4 = 0, \qquad x = 4$

$x + 4 = 0$, $x = -4$ *демек* $x = 4$ *жана* $x = -4$ *болгондо бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айланат. Бул функциянын аныкталуу областы -4 жана 4 төн башка бардык сандар. Муну төмөндөгүдөй жазууга да болот.*



$(-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty)$.

б) $\frac{5x+12}{x^3-8}$; $x^3 - 8 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$$(x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$x - 2 = 0, \; x^2 + 2x + 4 = 0$$

$x = 2$, $D = 4 - 16 = -12 < 0$ *демек бул теңдеменин тамыры жок.*

Бул функциянын аныкталуу областы 2 ден башка бардык сандар. $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

в) $\frac{3-4x}{x^2-4x-5}$, $x^2 - 4x - 5 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз*

$$D = 16 + 20 = 36$$

$$x_{112} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}; \; x_1 = \frac{4+6}{2} = 5, x_2 = \frac{4-6}{2} = -1;$$

Демек бул функциянын аныкталуу областы 5 жана -1 ден башка бардык сандар. $D = (-\infty; -1) \cup (-1; 5) \cup (5; +\infty)$

г) $\frac{x^2+1}{x^3-2x+4}$; $x^3 - 2x - 4 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз*

$$x^3 - 4x + 2x - 4 = x(x^2 - 4) + 2(x - 2) =$$
$x(x-2)(x+2) + 2(x-2)$

Демек $(x-2)(x^2+2x+2) = 0$ *болот.*

$x - 2 = 0$, $x^2 + 2x + 2$

$x = 2$; $D = 4 - 8 = -4 < 0$ *бул теңдеменин тамыры жок.*

Бул функциянын аныкталуу областы 2 ден башка бардык сандар, башкача айтканда. $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ *болот.*

14. Чыгаруу: а) $2f^2(x) - 7f(x) - 5 = 2 \cdot (x^2)^2 - 7x^2 - 5 =$

$$= 2x^4 - 7x^2 - 5;$$

б) $xf(x^2 + 2x + 3) = x(x^2 - 2x + 3)^2 = x((x^2 - 2x) + 3)^2 =$

$$= x((x^2 - 2x)^2 + 2 \cdot 3(x^2 - 2x) + 3^2) =$$

$$= x(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 6x^2 - 12x + 9) =$$

$$= x(x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9);$$

в) $f(x^2 + 2) + f(x^2 - 2) = (x^2 + 2)^2 + (x^2 - 2)^2 =$

$$= x^4 + 4x + 4 - x^4 - 4x + 4 = 2x^4 + 8;$$

г) $3f^3(x) + 4f^2x - 2f(x) = 3(x^2)^3 + 4(x^2)^2 - 2 \cdot (x^2) =$

$$= 3x^6 + 4x^4 - 2x^2.$$

15. Чыгаруу: $f(x) = x^2, \ g(x) = 2x^2 + 1$

а) $2f^2(x) + g^2(x) = 2 \cdot (x^2)^2 + (2x^2 + 1)^2 =$

$$= 2x^4 + 4x^4 + 4x^2 + 1 = 6x^4 + 4x^2 + 1;$$

б) $f^3(x) - 3gx = (x^2)^3 - 3(2x^2 + 1) = x^6 - 6x^2 - 3;$

в) $f(g(x)) = (2x^2 + 1)^2 = 4x^4 + 4x + 1$

г) $g(f(x)) = 2(x^2)^2 + 1 = 2x^4 + 1$

16. Чыгаруу: а) $f(4) = \frac{2 \cdot 4^2 - 1}{4^2 + 7} = \frac{32-1}{16+7} = \frac{31}{23},$

$f(-4) = \frac{2 \cdot (-4)^2 - 1}{(-4)^2 + 7} = \frac{32-1}{16+7} = \frac{31}{23}; \quad f(4) - f(-4) = \frac{31}{23} - \frac{31}{23} = 0.$

б) $g(2) = \frac{5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2}{2+10} = \frac{20-6}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6},$

$$g(-2) = \frac{5\cdot(-2)^2 - 3\cdot(-2)}{(-2)+10} = \frac{20+6}{8} = \frac{26}{8} = 3\frac{1}{4},$$

$$g(2) + g(-2) = 1\frac{1}{6} + 3\frac{1}{4} = 4\frac{5}{12};$$

в) $f(x+1) = 2(x+1)^2 - 3(x+1) = 2(x^2 + 2x + 1) -$

$$-3x - 3 = 2x^2 + x - 1;$$

$$f(x-1) = 2(x-1)^2 - 3(x-1) = 2(x^2 - 2x + 1) - 3x + 3 =$$
$$= 2x^2 - 7x + 5;$$

$$f(3) = 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3 = 18 - 9 = 9;$$

$$f(-5) = 2\cdot(-5)^2 - 3\cdot(-5) = 50 + 15 = 65;$$

17. Чыгаруу: а) $y = -0{,}5x - 12$, *бул функциянын нөлдөрүн табуу үчүн* $-0{,}5x - 12 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$$-0{,}5x = 12$$

$$x = 12 : (-0{,}5)$$

$$x = -24.$$

б) $y = \sqrt{5x^2 + 1}$; $5x^2 + 1 = 0$ *бул теңдеменин тамыры жок. Демек,* $\sqrt{5x^2 + 1}$ *функциясынын нөлү жок.*

в) $y = x(x-4)(x+7)$, y=0 болсо, анда

$$\begin{array}{llll} x = 0, & x \neq 0, & x \neq 0, & \\ x - 4 \neq 0, \text{ же} & x = 4, \text{ же} & x \neq 0, & \\ x + 7 \neq 0, & x \neq -7 & x = -7 & \end{array}$$

демек, 0, 4, –7 сандары функциянын нөлдөрү болот.

Жообу: $x_1=-7$, $x_2=0$, $x_3=4$.

г) $y = \sqrt{x^2 - 9}$, $x^2 - 9 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз*

$$(x-3)(x+3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad x = 3$$
$$x + 3 = 0 \quad x = -3$$

демек, функиянын нөлдөрү 3 жана –3 сандары.

18. Чыгаруу: Аргументтин карама-каршы маанилеринде функциянын маанилерин табабыз.

а) $f(x) = 5x^2 - 2$, $f(-x) = 5(-x)^2 - 2 = 5x^2 - 2$,

$f(x) = f(-x)$ *демек, бул функция жуп.*

б) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^4}$, $f(-x) = \frac{(-x)^2+2}{(-x)^4} = \frac{x^2+2}{x^4}$,

$f(x) = f(-x)$ *демек, бул функция жуп.*

19. Чыгаруу: а) $f(x) = x(3 + x^2)$;

$f(-x) = -x \cdot (3 + (^2 - x)) = -x \cdot (3 + x^2)$ $\quad f(-x) = -f(x)$ *ке демек, бул функция так.*

б) Аргументтин карама-каршы сан маанилеринде эсептейли.

$f(x) = \frac{x^3}{2x^2+1}$; $f(1) = \frac{1^3}{2 \cdot 1^2+1} = \frac{1}{3}$;

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{2 \cdot (-1)^2 + 1} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3};$$

$f(1) + f(-1) = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ *демек бул функция так функция болот.*

20. Чыгаруу: а) $(x + 2)^3 + (x - 2)^3 =$

$= (x + 2 + x - 2)(x + 2)^2 - (x + 2)(x - 2) + (x - 2)^2) =$

$= 2x(x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4 + x^2 - 4x + 4) = 2x(x^2 + 12)$

$2x$ *функциясы так функция,* $x^2 + 12$ *функциясы жуп функция.* $2x(x^2 + 12)$ *функциясы так жана жуп функциялардын көбөйтүндүсү.*

б) $5x^4 - 3x + 2 = (5x^4 + 2) - 3x$

мында $5x^4 + 2$ *функциясы жуп функция* $-3x$ *функциясы так функция.*

21. Чыгаруу: а) $f(x) = x^4 - x^2 + 2$,

$f(2) = 2^4 - 2^2 + 2 = 14$

$f(-2) = (-2)^4 - (-2)^2 + 2 = 14$

$f(2) = f(-2)$ *демек берилген функция жуп.*

б) $f(x) = \frac{\sqrt{5+x^2}}{3-x}$; $f(1) = \frac{\sqrt{5+1^2}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $f(-1) = \frac{\sqrt{5+(-1)^2}}{3-(-1)} = \frac{\sqrt{6}}{4}$;

$f(1) \neq f(-1)$ *демек бул функция так да жуп да эмес.*

в) $f(x) = 3x - \frac{x^3}{5} + \frac{x^5}{25}$; $f(1) = 3 \cdot 1 - \frac{1^3}{5} + \frac{1^5}{25} = 3 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$

$f(-1) = 3 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{5} + \frac{(-1)^5}{25} = -3 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = -(3 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25})$

$f(1) + f(-1) = 0$ *демек бул функция так.*

г) $f(x) = 4x^3 - 5x$; $f(2) = 4 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2 = 4 \cdot 8 - 10 = 22$

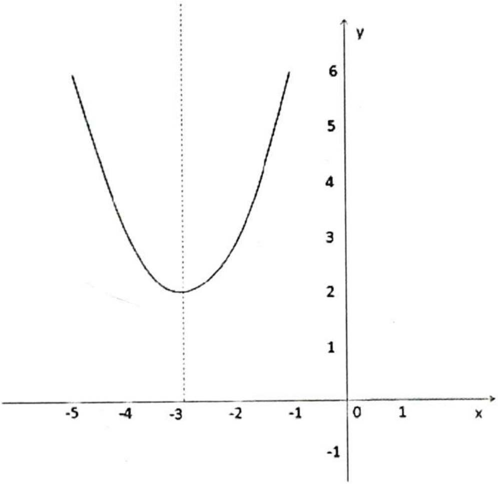
$f(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 5 \cdot (-2) = -32 + 10 = -22$

$f(2) + f(-2) = 22 + (-22) = 0$ *бул функция так.*

22. Чыгаруу: а) $f(x) = (x+3)^2 + 2$ *функциясын графиги чокусу (-3;2) чекити болгон, тармактары жогору караган парабола болот. Аргумент x тин айрым маанилери үчүн таблица түзөбүз.*

x	-5	-4	-3	-2	-1
y	6	3	2	3	6

Бул таблица боюнча график чийебиз.



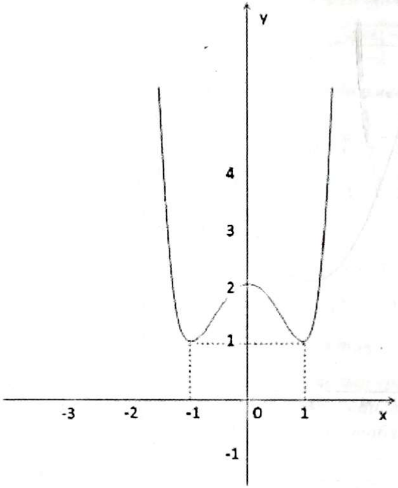
Графикке байкоо жүгүзсөк: бул функция $(-\infty; -3)$ *интервалында кемүүчү,* $(3; +\infty)$ *интервалында өсүүчү.*

$x_{min} = -3, \ \ y_{min} = 2.$

б) Чыгаруу: $f(x) = x^6 + x^4 - 3x^2 + 2$ *функиясынын аргументи x тин айрым маанилерине таблица түзөбүз.*

Таблица боюнча график чийебиз.

x	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
y	*70*	*1*	*2*	*1*	*70*



Түзүлгөн график боюнча анализ жүргүзсөк: Функция $(-\infty; -1)$ *аралыгында кемүүчү,* $(-1; 0)$ *аралыгында өсүүчү,* $(0; 1)$ *аралыгында кемүүчү,* $(1; +\infty)$ *аралыгында өсүүчү болот.*

$x_{min} = -1\,; \quad y_{min} = f(-1) = 1,$

$x_{min} = 1; \quad y_{min} = f(1) = 1,$

$x_{max} = 0\,; \quad y_{max} = f(0) = 2.$

в) Чыгаруу: $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$ *функциясы үчүн төмөнкүдөй таблица түзөбүз.*

Функциянын аныкталуу областы $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ *көптүк болот.*

x	-3	-2	-1,5	-0,5	0	1
y	$1\frac{1}{4}$	2	5	5	2	$1\frac{1}{4}$

Таблица боюнча график түзөбүз.

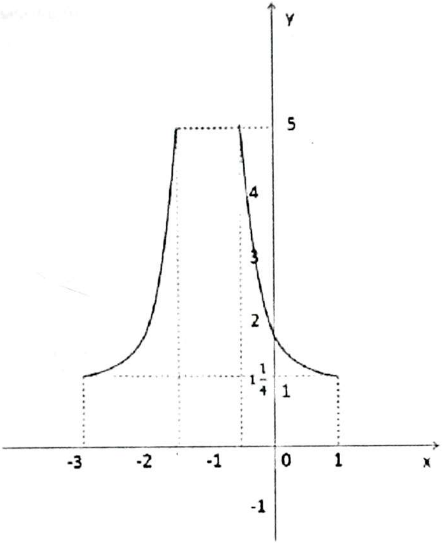


График боюнча анализ жүргүзөбүз $(-\infty; -1)$ *аралыгында функция өсөт,* $(-1; +\infty)$ *аралыгында функция кемийт,*

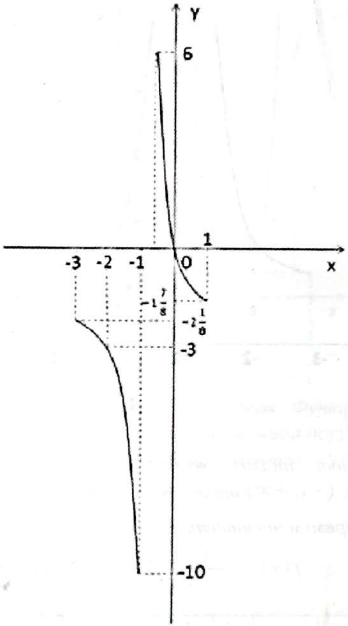
Функция экстремум чекиттерге ээ болбойт.

г) Чыгаруу: г) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3} - 2$ *функциясы үчүн таблица түзөбүз.*

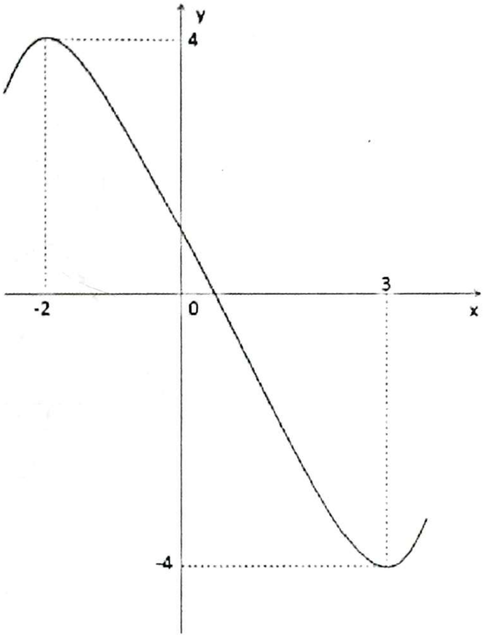
x	-3	-2	-1,5	-0,5	0	1
y	$-2\frac{1}{8}$	-3	-10	6	-1	$-1\frac{7}{8}$

График боюнча анализ жүргүзөбүз. $(-\infty; -1)$ *аралыгында жана* $(-1; +\infty)$ *аралыгында кемүүчү.*

Функция экстремумга ээ болот.

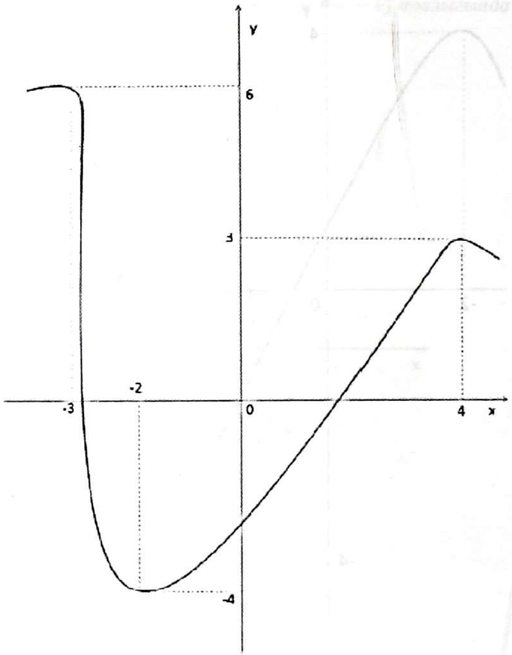


23. *Чыгаруу: а) Берилген* $x_{max} = -2$, $x_{min} = 3$, $f(-2) = 4$, $f(3) = -4$. *Бул экстремумдарды координата тегиздигинде белгилейбиз жана жылма ийри сызык менен туташтырабыз. Алынган ийри сызык берилгендер боюнча чийилген графиктин эскизи болот.*



б) $x_{max} = -3$, $x_{max} = 4$, $x_{min} = -2$,

$f(-3) = 6$, $f(4) = 3$, $f(-2) = -4$ *бул берилген экстремумдарды координата тегиздигинде белгилейбиз, аларды туташтырып графиктин эскизин алабыз.*

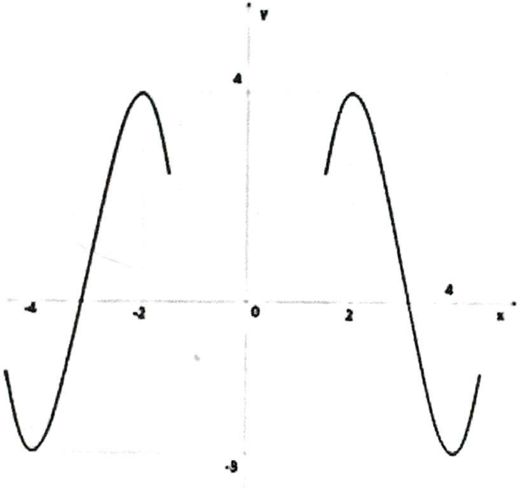


в) f −жуп функция

$x_{max} = 2, \ x_{min} = -4, \quad f(2) = 4, \quad f(4) = -3$

f жуп функция болгондуктан

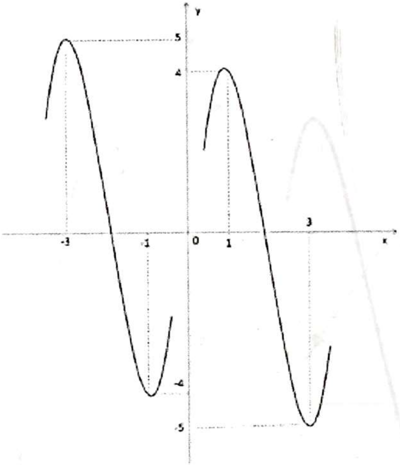
$x_{max} = -2, \ x_{min} = 4, \quad f(-2) = 4, \quad f(-4) = -3$ *болот. Ошондой эле силерге белгилүү жуп функциянын графиги ордината огуна карата симметриялуу болот. Берилгендер боюнча экстремумдарды координата тегиздигинде белгилеп, аларды туташтырып графиктин эскизин алабыз.*



г) f −так функция

$$x_{max} = -3, \ \ x_{min} = -1, \ \ f(-3) = 5, \ \ \ f(-1) = -4.$$

Демек, $f(3) = -5, \ \ f(1) = 4$ *болот. Себеби так функциянын графиги координаталар башталышына карата симметриялуу болот. Берилген экстремумдарды координаталар тегиздигинде белгилеп, аларды туташтырып функциянын графигинин эскизин алабыз.*



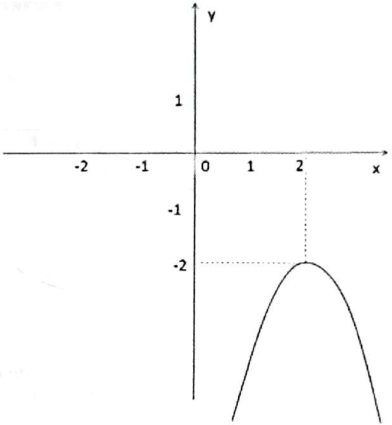
24. Чыгаруу:

а) $f(x) = -3x^2 + 12x - 14;$ $-3x^2 + 12x - 14$ *үч мүчөсүнүн толук квадратын бөлүп алабыз.*

$$-3x^2 + 12x - 14 = -3\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + \frac{14}{3}\right) =$$

$$= -3\left((x-2)^2 + \tfrac{2}{3}\right) = -3(x-2)^2 - 2.$$

$f(x)$ *функциясын* $f(x) = -3(x-2)^2 - 2$ *түрүндөгү квадраттык функцияга өзгөртүп түздүк. Мында m=+2; n=-2 башкача айтканда бул функциянын графиги чокусу (2;-2) чекити болгон, тармактары төмөн караган парабола болот. Анын схемалык эскизин чийебиз.*



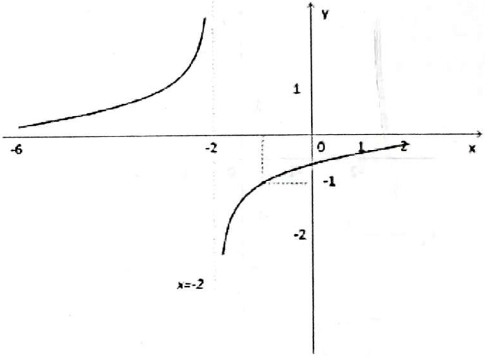
Графикке *байкоо жүргүзсөк: функция* $(-\infty; 2)$ *өсөт,* $(2; +\infty)$ *интервалында кемийт.*

$x_{max} = 2; \quad f_{max} = -2$

б) Чыгаруу: $f(x) = -\frac{1}{x+2}$; *бул функциянын аныкталуу областына x=-2 кирбейт. Аргументтин айрым маанилерине таблица түзөбүз.*

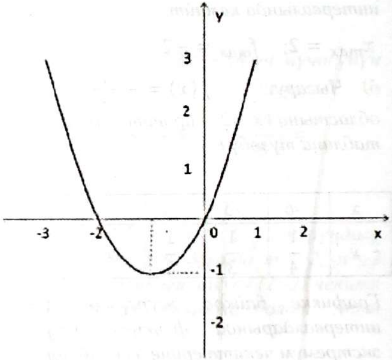
x	*-6*	*-5*	*-4*	*-3*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	*1*	*-1*	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$

Графикке байкоо жүргүзсөк: $(-\infty; -2)$ *жана* $(-2; +\infty)$ *интервалдарында функция өсүүчү болот. Бул функция экстремум чекиттерине ээ болбойт.*



в) $f(x) = x^2 + 2x$; $x^2 + 2x$ *тин толук квадратын бөлүп алабыз.* $x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$

$f(x) = (x+1)^2 - 1$ *мында* $m = -1$, $n = -1$ *демек бул функциянын графиги чокусу* $(-1; -1)$ *чекити болгон парабола болот. Анын схемалык эзкизин чийип алабыз.*



Бул функция $(-\infty; -1)$ *интерва-лын-да кемийт.* $(-1; +\infty)$ *интерва-лында өсөт.*

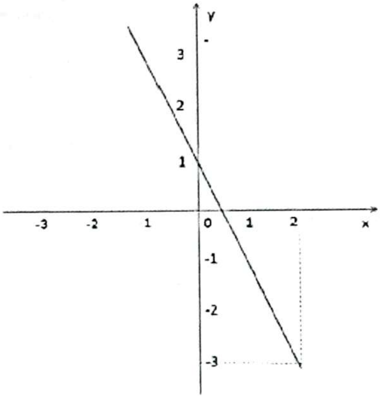
$x_{min} = -1$; $f_{min} = -1$

г) $f(x) = -2x + 1$. *Бул сызыктуу функция. Анын графиги түз сызык болот.*

x	*2*	*0*
y	*-3*	*1*

Бул функция $(-\infty; +\infty)$ аралыгында кемүүчү болот.

Экстремум чекиттерине ээ болбойт.



25. Чыгаруу: Функцияларды изилдөөнүн жалпы схемасы боюнча изилдейбиз.

а) $f(x) = x^2 + x$

1. $D(f) = R;\ E(f) = R.$

2. Функция жуп да, так да эмес.

$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x\ \ f(-x) \neq f(x)$

3. $0x$ *огу менен* $(-1; 0)$ *жана* $(0,0)$ *чекиттеринде кесилишет.*

$x^2 + x = 0,\ x(x+1) = 0,\ x = 0;\ x = -1.$

$0y$ *огу менен* $(0,0)$ *чекитинде график кесилишет.*

4. $(-2, -1)$ *аралыгында* $f(x) \geq 0$. $(-1; +\infty)$ *аралыгында* $f(x) < 0$

5. $[-2; +\infty)$ *аралыгында функция кемүүчү.*

6. Функциянын максимуму $x_{max} = -2;\quad f(x)_{max} = 1.$

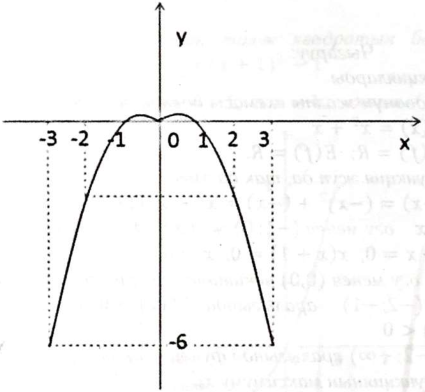
б) Чыгаруу: $f(x) = |x| - x^2;$

1. Функциянын аныкталуу областы $D(f) = R$ *маанилеринин областы* $E(f) = R.$

2. Функция жуп болот, анткени

$$f(-x) = |-x| - (-x)^2 = |x| - x^2;$$

3. *Абцисса огу менен (-1;0), (0;0), (1;0) чекиттеринде график кесилишет. Функциянын графиги ордината огу менен (0;0) чекитинде кесилишет.*
4. *Функция (0;1) аралыгында жана (-1;0) аралыгында оң* $(-\infty;\ -1), (1;+\infty)$ *аралыктарында терс.*
5. $(-\infty;-0{,}5), (0;0{,}5)$ аралыктарында функция *өсөт,* $(0{,}5;+\infty), (-0{,}5;0)$ *аралыктарында функция кемийт.*
6. *Функциянын экстремумдары.*
$x_{max} = -0{,}5;\quad f(x)_{max} = \frac{1}{4};$
$x_{max} = 0{,}5;\quad f(x)_{max} = \frac{1}{4};$
$x_{min} = 0;\quad f(x)_{min} = 0.$
Функциянын графигин түзүү.



в) Чыгаруу: $f(x) = 1 - \sqrt{x+2};$
1. $x < -2$ *сандары функциянын аныкталуу областына кирбейт, башкача айтканда* $x + 2 \geq 0,\ x \geq -2$, *болгондо гана* $\sqrt{x+2}$ *туюнтмасы мааниге ээ болот.*
$D(f) = [-2;+\infty);\ \ E(f) = (-\infty;1].$
2. Функция жуп да так да эмес.

3. Функциянын абцисса огу менен кесилишкен чекиттерин табабыз. Ал үчүн $1 - \sqrt{x+2} = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$$1 - \sqrt{x+2} = 0$$

$$\left(-\sqrt{x+2}\right)^2 = (-1)^2$$

$$x + 2 = 1$$

$$x = 1 - 2, \quad x = -1,$$

демек (-1;0) чекитинде график абцисса огу менен кесилишет.

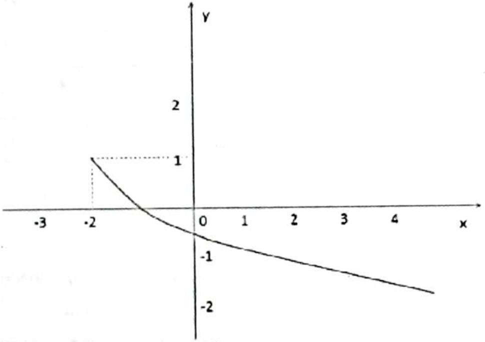
Ордината огу менен графиктин кесилишкен чекитин табабыз.

$f(0) = 1 - \sqrt{0+2} = 1 - \sqrt{2}$, *демек функциянын графиги* $(0;\ 1 - \sqrt{2})$ *чекитинде ордината огу менен кесилишет.*

4. (–2;–1) аралыгында функция оң, $(-1; +\infty)$ *аралыгында терс маанилерди алат.*

5. Функция . $[-2; +\infty)$ *аралыгында кемүүчү.*

6. Функциянын экстремумдары $x_{max} = -2;\quad f(x)_{max} = 1.$



г) Чыгаруу: $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$.

1. Аныкталуу областы: $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

Маанилеринин областы: $E(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. Функция жуп да, так да эмес.

3. Функциянын графигинин $0x$ *огу менен кесилишкен чекитин табабыз. Ал үчүн:* $\frac{x+2}{x-2} = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*

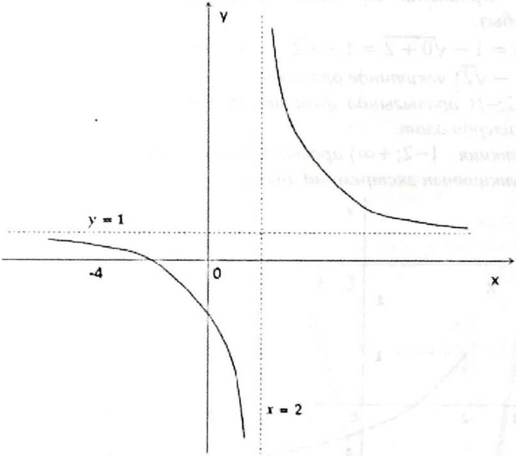
$\begin{cases} x+2=0 \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$ *демек* $(-2{,}0)$ *чекитинде кесилишет.*

$x=2$ *түзү вертикалдык асимтота,* $y=1$ *түзү горозантaлдык асимтота.*

4. $(-\infty;-2)$ *жана* $(2;+\infty)$ *аралыктарында функция оң,* $(-2{,}2)$ *аралыгында функция терс маанилерди алат.*

5. Аныкталуу областында функция кемүүчү.

6. Функция экстемумга ээ болбойт.



26. Эгерде α*:* $\frac{3\pi}{2}$; -3π; 450^0; -720^0 *тарга барабар болсо, чекиттин бирдик айланадагы координаталарын тапкыла.*

Чыгаруу: $\frac{3\pi}{2}=\frac{3190^0}{2}=3\cdot 90^0=270^0$; 270^0 *ка туура келген чекиттин координатасы* $(0;-1)$ *болот.*

$-3\pi=-3\cdot 180^0=-540^0=-(360^0+180^0)$, *демек, бир жолу толук терс буруу, дагы толук бурунун* $\frac{1}{2}$ *не терс буруу, ошондо* -3π *ге туура келген чекиттин координатасы* $(-1;0)$ *болот.*

$450^0 = 360^0 + 90^0$, *демек бир толук оң буруу дагы толук буруунун* $\frac{1}{4}$ *не оң буруу, ошондо* 450^0 *ка туура келген бирдик айланадагы чекиттин координатасы* $(0; 1)$ *болот.*

$-720^0 = -2 \cdot 360^0$, *демек бул 2 жолу толук терс буруу. мындай учурда* -720^0 *бурч* 0^0 *бурч менен дал келет, буга туура келген бирдик айлананын чекитинин координатасы* $(1; 0)$ *болот.*

27. Төмөнкү бурчтарды градустук чен менен туюнткула.

а) $\frac{5\pi}{2}$; *б)3 рад;* *в)* $\frac{11\pi}{9}$; *г)* 3π; *д)7 рад;* *е)-2 рад.*

Чыгаруу: а) $\frac{5\pi}{2} = \frac{5 \cdot 180^0}{2} = 450^0$;

б) $3 \text{ рад} = \frac{180^0}{\pi} \cdot 3 \approx \frac{540^0}{3{,}14} \approx 172^0$; *в)* $\frac{11\pi}{9} = \frac{11 \cdot 180^0}{9} = 220^0$;

г) $3\pi = 3 \cdot 180^0 = 540^0$; *д)* $7 \text{ рад} = \frac{180^0}{\pi} \cdot 7 = \frac{1260^0}{3{,}14} \approx 401^0$;

е)$-2 \text{ рад} = \frac{180^0}{\pi} \cdot (-2) = \frac{-360^0}{3{,}14} \approx -115^0$.

28. Чыгаруу: а) $157^0 30' = \left(157\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{315}{2}\right)^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot \frac{315}{2} = \frac{7\pi}{8}$;

б)$324^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 324^0 = \frac{9\pi}{5}$; *в)* $60^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 60^0 = \frac{\pi}{3}$; *г)* $150^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 150^0 = \frac{5\pi}{6}$; *д)* $192^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 192^0 = \frac{16\pi}{15}$; *е)* $220^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 220^0 = \frac{11\pi}{9}$.

29. Чыгаруу: Функциялардын жуп же так экендигин аныктоодо f(-x)=f(x), f(-x)=-f(x) барабардыктарынын аткарылышын пайдаланабыз.

а) f(x)=$cos^5 x$, $f(-x) = (cos(-x))^5 = cos^5 x$

f(-x)=f(x) барабардыгы аткарылды, демек $cos^5 x$ *функциясы жуп.*

б) f(x)=$sin^6 x$; *f(-x)=*$(sin(-x))^6 = (-sinx)^6 = sin^6 x$

f(-x)=f(x) , демек $sin^6 x$ *жуп функция.*

в) f(x)=$2cos^5 x + 3sin^4 x$;

f(-x)=$2(cos(-x))^5 + 3(sin(-x))^4 = 2cos^5 x + 3(-sinx)^4 =$

$$= 2cos^5 x + 3sin^4 x$$

f(-x)=f(x) демек, f функциясы жуп.

г) f(x)=$cos^7 x + sin^3 x$; *f(-x)=*$(cos(-x))^7 + (sin(-x))^3 =$ $=cos^7 x + (-sinx)^3 = cos^7 x - sin^3 x$

$f(-x) \neq f(x)$, *демек f функциясы жуп да, так да эмес.*

д) $f(x)=x^4+tg^2x+xsinx;$

$$f(-x)=(-x)^4+tg^2(-x)+(-x)sin(-x)=x^4+tg^2x+xsinx$$

f(-x)=f(x) демек, f функциясы жуп болот.

е) $f(x)=\frac{tgx-ctgx}{-\ |x|},$

$$f(-x)=\frac{tg(-x)-ctg(-x)}{|-x|}=\frac{-tgx+ctgx}{x}=\frac{-(tgx-ctgx)}{x},$$

f(-x)=-f(x) демек, f функциясы так функция.

30. Чыгаруу: $f(x)$ *функциясынын мезгили T болсо,*

$Af(kx+b)$ *функциясынын мезгили* $\frac{T}{|k|}$ *болот.*

а) $y=2sin\frac{x}{3}$*;* *sin x функциясынын мезгили* 2π*, анда берилген функциянын мезгили* $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$ *болот.*

Жообу: 6π

б) $y=\frac{1}{3}cos6x$*,* $cosx$ *тин мезгили* 2π*, анда* $cos6x$ *тин мезгили* $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ *болот.*

Жообу: $\frac{\pi}{3}$

в) $y=5tg2x$*,* tgx *тин мезгили* π*, анда* $tg2x$ *тин мезгили* $\frac{\pi}{2}$ *болот.*

Жообу: $\frac{\pi}{2}$.

г) $y=sin2x-cos3x+sin3x\cdot cos2x$ *, бул туюнтманы өзгөртүп түзөбүз.*

$sin2x\cdot cox3x+sin3xcos2x=sin(3x+2x)=sin5x$ *, демек y функциясынын мезгили* $\frac{2\pi}{5}$ *болот.*

Жообу: $\frac{2\pi}{5}$.

д) $y=\ cos^2x-sin^2x;\ cos^2x-sin^2x=cos2x$ *, демек, y функциясынын мезгили* $\frac{2\pi}{2}=\pi$ *болот.*

Жообу: π.

е) $y=3ctg\ \frac{x}{2}$*;* $ctgx$ *функциясынын мезгили* π *, демек y функциясынын мезгили* $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$ *болот.*

Жообу: 2π.

31. а) Чыгаруу: $4\cdot sin90^0+cos240^0=$

$= 4 \cdot 1 + cos(180^0 + 60^0) = 4 - cos60^0 = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2};$

б) $sin(-45^0) - cos(-60^0) = -sin45^0 - cos60^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} =$

$= \frac{-\sqrt{2}-1}{2};$

в) $3ctg210^0 + 2 = 3ctg(180^0 + 30^0) + 2 = 3ctg30^0 + 2 =.$

$=3 \cdot \sqrt{3} + 2;$

г) $cos(-30^0) \cdot tg(-60^0) = cos30^0 \cdot (-tg60^0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\sqrt{3}) =$

$= -\frac{3}{2};$

д) $sin390^0 \cdot cos420^0 = sin(360^0 + 30^0) \cdot cos(360^0 + 60^0) =$

$= sin30^0 \cdot cos60^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$

е) $cos1140^0 \cdot ctg(-45^0) = cos(3 \cdot 360^0 + 60^0) \cdot (-ctg45^0) =$

$= cos60^0 \cdot (-ctg45^0) = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}.$

32. *Чыгаруу: а)* $y = 3 + cosx$, *функциясынын аныкталуу областы* $D(y) = R$, $cosx$ *тин маанилеринин көптүгү* $[-1; 1]$ *болгондуктан,* $E(y) = [2; 4]$ *болот.*

б) $y = 2\sin x - 1;$ $D(y) = R$, $E(y) = [-3; 1]$ *болот.*

в) $y = -\frac{1}{2}tg\, x;$ *аныкталуу областы* $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$ *болгон чыныгы сандардын көптүгү,* $E(y) = (-\infty; +\infty)$ *болот.*

г) $y = -2{,}5\cos x.$ $D(y) = R$, $E(y) = [-2{,}5; 2{,}5]$ *болот.*

33. *Чыгаруу: а)* $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$

$t = arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t = \frac{\pi}{3};$ *Жообу:* $t = \frac{\pi}{3};$

б) $\sin t = -\frac{1}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$

$t = arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $t = -\frac{\pi}{6};$ *Жообу:* $t = -\frac{\pi}{6};$

в) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[0; \pi];$

$t = arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $t = \frac{5\pi}{6};$ *Жообу:* $t = \frac{5\pi}{6};$

г) $\cos t = 0$, $[0; \pi];$

$t = arccos0$, $t = \frac{\pi}{2};$ *Жообу:* $t = \frac{\pi}{2};$

д) $tg\, t = 1, \quad [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$;

$$t = arctg1,\ t = \frac{\pi}{4};\ \textit{Жообу: } t = \frac{\pi}{4};$$

е) $tg\, t = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$t = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ t = -\frac{\pi}{6};\ \textit{Жообу: } t = -\frac{\pi}{6};$$

ж) $ctg\, t = (-\sqrt{3}), \quad [0; \pi]$

$$t = arcctg(-\sqrt{3}),\ t = +\frac{5\pi}{6};\ \textit{Жообу: } t = +\frac{5\pi}{6};$$

з) $ctg\, t = 1, \quad [0;\ \pi]$.

$$t = arctg1,\ t = \frac{\pi}{4};\ \textit{Жообу: } t = \frac{\pi}{4}.$$

34. Чыгаруу:

а) $arcsin0 + arcsin\frac{1}{2} = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$;

б) $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + arccos0 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$;

в) $arccos(-1) + arctg1 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$;

г) $arcctg0 - arc\,sin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$;

д) $arc\,tg(-\sqrt{3}) - arc\,tg0 = -\frac{\pi}{3} - 0 = -\frac{\pi}{3}$;

е) $arc\,cos\left(-\frac{1}{2}\right) + arc\,cos\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$;

ж) $arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arcctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$;

з) $arctg(-1) - arc\,sin1 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$.

35. Чыгаруу:

а) $y = arc\,sin(x-2)$, *арксинус б.а.* $arc\,sinx$ *функциясынын аныкталуу областы [–1;1] кесиндиси болот. Анда,* $y = arc\,sin(x-2)$ *функциясынын аныкталуу областын төмөнкүдөй табабыз.*

$$-1 \le x - 2 \le 1$$
$$-1 + 2 \le x \le 1 + 2$$
$$1 \le x \le 3$$

демек, бул функциянын аныкталуу областы [1;3] кесиндиси болот.

б) $y = arc\sin(cosx)$, $cosx$ *функциясынын маанилеринин көптүгү [-1;1] кесиндиси, аныкталуу областы* $(-\infty;+\infty)$, *анда* $y = arc\sin(cosx)$ *функциясынын да аныкталуу областы* $(-\infty;+\infty)$ *болот.*

36. Чыгаруу:

а) $\sin(arcsinx) = x$ *жана* $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$,

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ *формуласын колдонуп, туюнтманы өзгөртөбүз.*

$$\sin\left(2arcsin\frac{1}{3}\right) = 2\sin\left(arcsin\frac{1}{3}\right)\cdot\cos\left(arcsin\frac{1}{3}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{1-\sin^2\left(arcsin\frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9};$$ *мында* $\cos\left(arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Жообу: $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

б) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ *формуласын колдонобуз.*

$$\cos\left(2arcsin\frac{1}{3}\right) = \cos^2\left(arcsin\frac{1}{3}\right) - \sin^2\left(arcsin\frac{1}{3}\right) =$$

$$= 1-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1-\frac{1}{9}-\frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

Жообу: $\frac{7}{9}$.

в) $tg\left(2arcsin\frac{1}{3}\right) =$

$$= \frac{\sin\left(2arcsin\frac{1}{3}\right)}{\cos\left(2arcsin\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{7}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{7};$$

Жообу: $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

а) жана б) мисалдарын б.а.

$$\sin\left(2arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$\cos\left(2arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9}$ *ни пайдаланабыз*

г) $tg(2arc\ tg\ 3) =$

$$= \frac{2tg(arctg3)}{1-tg^2(arctg3)} = \frac{2\cdot 3}{1-3^2} =$$

$$= \frac{6}{1-9} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}.$$

Жообу: $-\frac{3}{4}$.

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ *формуласы боюнча туюнтманы өзгөртүп түзөбүз жана* $tg(arctgx) = x$ *теңдештигин пайдаланып эсептөө жүргүзөбүз.*

д) $\sin\left(3\arcsin\frac{1}{3}\right) =$

$$= \sin\left(2\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right) \cdot \cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right) \cdot \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{27} + \frac{7}{27} = \frac{23}{27};$$

$$\sin(\propto + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

формуласын колдонобуз.

Эскертүү: Мында а) жана б) пункттарынын чыгарылыштарын б.а. $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$,

$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9},$$

$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ *ди пайдаландык.*

Жообу: $\frac{23}{27}$.

е) $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{12}{13} = a$ *деп алабыз.*

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{12}{13}\right) = \sin a$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) \cdot \cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) +$$

$$+\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) \cdot \sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{3}{13} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$$

$\frac{63}{65} = \sin a$, $a = \arcsin\frac{63}{65}$

Демек,

$\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{12}{13} = \arcsin\frac{63}{65}$

экендигин таптык.

Туюнтманы синус аркылуу туюнтуп алабыз.

$$\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) =$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)} =$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13};$$

$$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) =$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

бул маанилерди туюнтмага коюп, эсептөө жүргүзөбүз.

1.12-1.13. Тригонометриялык теңдемелерди чыгаруу.

37. Чыгаруу:

а) $2cosx + \sqrt{3} = 0,$

$2cosx = -\sqrt{3},$

$cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2},$

$x = \pm arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,$

$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n\epsilon z.$

Жообу: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n\epsilon z.$

б) $2sinx - 1 = 0,$

$2sinx = 1,$

$sinx = \frac{1}{2}$

$x = (1)^k are\,sin\frac{1}{2} + \pi k,$

$x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k\epsilon Z$

Жообу $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z.$

в) $\sin 3x + 5 = 6,$

$\sin 3x = 1,$

$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in z,$

Жообу: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in z,$

г) $2\cos 2x + 3 = 4,$

$2\cos 2x = 1,$

$\cos 2x = \frac{1}{2},$

$2x = \pm ars\cos\frac{1}{2} + 2\pi n,$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in z.$

Жообу: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in z.$

д) $\sqrt{3}\,tg\,x - 1 = 0,$

$tg\,x = \frac{1}{\sqrt{3}},$

$x = arc\,tg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n,$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,$

Жообу: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

е) $2\sqrt{3}\ ctg\,x - 1 = 1$

$2\sqrt{3}\ ctg\,x = 2$

$ctg\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = ac\,ctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n,$

Жообу: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

38. Чыгаруу:

а) $\sin\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$ $\quad -\frac{x}{2} = (-1)^k\ ars\sin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k,$

$-\frac{x}{2} = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k,$

$$x = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\pi k, \qquad k \in Z.$$

Жообу: $x = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\pi k,\ k \in Z.$

б) $\sqrt{3}\left(tg\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = arc\,tg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n,$

$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n,\quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi n,\quad \frac{x}{2} = \pi n,\ \ x = 2\pi n, n \in Z.$

Жообу; $x = 2\pi n, n \in Z.$

в) $2\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}) = \sqrt{3}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3} = \pm arc\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,$

$\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n\ ,$

$-\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \ x = -\pi \pm \frac{\pi}{2} - 6\pi n,\ \ n \in Z.$

Жообу: $x = -\pi \pm \frac{\pi}{2} - 6\pi n,\ \ n \in Z.$

г) $3ctg\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sqrt{3}$

$ctg\ \left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$\frac{\pi}{4} + 2x = arc\,ctg\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,$

$\frac{\pi}{4} + 2x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \qquad 2x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi n, \qquad 2x = \frac{\pi}{12} + \pi n,$

$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2};\ n \in Z.$

Жообу: $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2};\ n \in Z.$

39. Теңдемелерди чыгаргыла.
Чыгаруу:

а) $\sin 5x \cdot \cos x - \cos 5x \cdot \sin x = \frac{1}{2},$

$\sin(5x - x) = \frac{1}{2},$

$\sin(\propto - \beta) =$
$= \sin\ \propto \cdot \cos\beta - \cos \propto \sin\beta$
формуласынын негизинде, теңдеменин сол

$\sin 4x = \frac{1}{2}$, *жагын өзгөртүп түзөбүз.*

$4x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k,$

$4x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,$

$x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z.$

Жообу: $x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z.$

б) $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$ $\quad \sin x = t$ *белгилөөсүн киийребиз.*

$$t^2 - 4t + 3 = 0,\ D = 16 - 4 \cdot 3 = 4,$$

$$t_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2};\quad t_1 = \frac{4+2}{2} = 3;\quad t_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$\sin x = 3$ *бул теңдеме чыгарылышка ээ болбойт.*

$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Жообу: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

в) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \qquad \cos x = u$

$$6u^2 + u - 1 = 0,\ D = 1 + 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25,$$

$$u_{\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-1+5}{12};$$

$$u_1 = \frac{-1+5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \qquad u_2 = \frac{-1-5}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}\ .$$

$$\cos x = \frac{1}{3},\ x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n;\quad n \in Z$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Жообу $\quad x = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

г) $\cos^2 x - 4\sin x - 4 = 0.$ $\quad | \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ *деп*

$$1-sin^2x-4\,sin\,x-4=0$$
$$sin^2x+4\,sin\,x+3=0$$

теңдемени өзгөргөртүп түзөбүз.

$sin\,x=t,$

$t^2+4t+3=0,\ \ D=16-4\cdot 3=4$

$t_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2};\ t_1=\frac{-4+2}{2}=\frac{-2}{2}=-1,\ \ t_2=\frac{-4-2}{2}=-3$

$sinx=-1$

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi,\ \ n\epsilon z.$

$sinx=-3$ *теңдемеси тамырга ээ болбойт.*

Жообу: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi,\ \ n\epsilon z.$

д) Чыгаруу: $2ctg^2x+3ctgx=2$

$ctgx=u$

$2u^2+3u-2=0,\qquad D=9+4\cdot 2\cdot 2=9-16=25$

$u_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4};\ \ u_1=\frac{1}{2};\ \ u_2=-2.$

$ctgx=\frac{1}{2}$

$x=arcctg\frac{1}{2}+\pi n;$

$ctgx=-2.$

$x=arcctg(-2)+\pi n,$

Жообу: $x=arcctg\frac{1}{2}+\pi n,\ \ x=arcctg(-2)+\pi n, n\epsilon z$

е) Чыгаруу: $3cos^2x-5cosx\,sinx+2sin^2x=0.$

$3cos^2x-3cosx\cdot sinx-2cosxsinx+2sin^2x=0$

$3cosx(cosx-sinx)-2sinx(cosx-sinx)=0$

$(cosx-sinx)(3cosx-2sinx)=0$

$cosx-sinx=0$

$1-tgx=0$

$tgx=1$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\epsilon z$

$3cosx-2sinx=0$

$3-2tgx=0$

$tgx=\frac{3}{2}$

$x=arctg\frac{3}{2}+\pi n, n\epsilon z.$

Жообу: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad x=arctg\frac{3}{2}+\pi n, n\epsilon z.$

ж) Чыгаруу:

$4sin^2x-sin2x=3;$

$3=3(sin^2x+cos^2x)$

$4sin^2x - sin2x - 3sin^2x - 3cos^2x = 0$

$sin^2x - 2sinx \cdot cosx - 3cos^2x = 0$

$tg^2x - 2tgx - 3 = 0$

$tgx = u$

$u^2 - 2u - 3 = 0, \quad D = 4 + 4 \cdot 3 = 16,$

$u_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2},$

$$u_1 = \frac{2+4}{2} = 3; \quad u_2 = \frac{2-4}{2} = -1$$

өзгөртүп түзүүсүн киййребиз.

$sin2x = 2sinx \cdot cosx$

теңдеменин эки жагын тең cos^2x ке бөлөбүз.

$tgx = 3$

$x = arctg3 + \pi n, \; n\epsilon z.$

$tgx = -1$

$x = arctg(-1) + \pi n, \; n\epsilon z$

$x = \frac{-\pi}{4} + \pi n, \; \epsilon z.$

Жообу: $x = arctg3 + \pi n, \; n\epsilon z, \quad x = \frac{-\pi}{4} + \pi n, \; n\epsilon z.$

з) Чыгаруу:

$$\sqrt{3}sin^2x = \frac{1}{2}sin2x,$$

$$\sqrt{3}sin^2x = sinx \cdot cosx,$$

$$\sqrt{3}sin^2x - sinxcosx = 0,$$

$$\sqrt{3}tg^2x - tgx = 0,$$

$$tgx(\sqrt{3}tgx - 1) = 0,$$

$tgx = 0,$

$x = arctg0 + \pi n$

$x = \pi n; n\epsilon z$

$\sqrt{3}tgx - 1 = 0,$

$tgx = \frac{1}{\sqrt{3}},$

$x = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n,$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \; n\epsilon z.$

Жообу: $x = \pi n; n\epsilon z; \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \; n\epsilon z.$

и) Чыгаруу:

$cos^4\frac{x}{3} - sin^4\frac{x}{3} - sin^2\frac{x}{3} - cos^2\frac{x}{3} = 0$

$\left(cos^4\frac{x}{3} - sin^4\frac{x}{3}\right) - (sin^2\frac{x}{3} + cos^2\frac{x}{3}) = 0$

$\left(cos^2\frac{x}{3} + sin^2\frac{x}{3}\right)\left(cos^2\frac{x}{3} - sin^2\frac{x}{3}\right) - 1 = 0,$

$cos^2\frac{x}{3} - sin^2\frac{x}{3} = 1$

$cos\frac{2}{3}x = 1$

$\frac{2}{3}x = 2\pi n, n\epsilon z, \quad x = 3\pi n, \; n\epsilon z.$

$cos^2x - sin^2x = cos2x$ жана $sin^2x + cos^2x = 1$ *формуласын пайдаланабыз.*

Жообу: $x = 3\pi n, \; n\epsilon z.$

к) Чыгаруу:

$1 - cosx = 2sin\frac{x}{2},$

$cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2} - \left(cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}\right) = 2sin\frac{x}{2},$

$2sin^2\frac{x}{2} - 2sin\frac{x}{2} = 0,$

$2sin\frac{x}{2}\left(sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0,$

$cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2} = 1,$ $cosx = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}$ *өзгөртүп түзүүлөрүн киййребиз.*

$sin\frac{x}{2} = 0,$ $\quad sin\frac{x}{2} - 1 = 0,$

$\frac{x}{2} = \pi n, n\epsilon z,$ $\quad sin\frac{x}{2} = 1,$

$x = 2\pi n,\ n\epsilon z.$ $\quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon z,$

$x = \pi + 4\pi n, n\epsilon z.$

Жообу: $x = 2\pi n,\ n\epsilon z.\ x = \pi + 4\pi n, n\epsilon z.$

40. Чыгаруу :

а) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ 2sinx\ siny = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ cos(x-y) - cos(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ cos(x-y) - cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$

$cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2},$ $\quad x - y = \pm\, arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n.$

$x - y = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\epsilon z$ *мындан төмөнкүдөй эки теңдемелер системасын алабыз.*

$\begin{cases} x_1 - y_1 = \frac{\pi}{6}, \\ x_1 + y_1 = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ *жана* $\begin{cases} x_2 - y_2 = -\frac{\pi}{6}, \\ x_2 + y_2 = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

$2x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3},$ $\quad 2x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$

$x_1 = \frac{\pi}{3},$ $\quad x_2 = \frac{\pi}{6},$

$y_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6},$ $\quad y_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$

Жообу:

$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\quad n\epsilon z,\qquad y_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\quad n\epsilon z$

$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\epsilon z.$ $\qquad$ $y_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon z.$

б) Чыгаруу:

$$\begin{cases} sinx - cosy = 0, \\ 4sinx \cdot cosy = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} sinx = cosy, \\ 4sinx \cdot cosy = 1, \end{cases}$$

$4cosy \cdot cosy = 1,\ 4cos^2y = 1,\ cos^2y = \frac{1}{4}.$

$cosy = \pm\frac{1}{2},$ $\qquad$ $sinx = \pm\frac{1}{2}.$

$cosy_1 = \frac{1}{2},$ $\qquad$ $sinx_1 = \frac{1}{2},$

$y_1 = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,$ $\qquad$ $x_1 = (-1)^k arcsin\frac{1}{2} + \pi k,$

$y_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$ $\qquad$ $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,$

$cosy_2 = -\frac{1}{2},$ $\qquad$ $sinx_2 = -\frac{1}{2},$

$y_2 = \pm\, arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,$ $\qquad$ $x_2 = (-1)^k\, arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,$

$y_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$ $\qquad$ $x_2 = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k.$

Жообу: $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ x_2 = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k, k\epsilon z,$

$y_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\qquad y_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon z.$

в) Чыгаруу:

$$\begin{cases} 3^{sinx+cosy} = 1, \\ 9^{sin^2x+cos^2y} = 3, \end{cases} \begin{cases} 3^{sinx+cosy} = 3^0, \\ 3^{2(sin^2x+cos^2y)} = 3, \end{cases} \begin{cases} sinx + cosy = 0, \\ 2(sin^2x + cos^2y) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} sinx = -cosy, \\ (-cosy)^2 + cos^2y = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad 2cos^2y = \frac{1}{2}.$$

$cos^2y = \frac{1}{4},$ $\qquad$ $sinx_1 = -\frac{1}{2}$

$cosy = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$ $\qquad$ $x_1 = (-1)^k\, arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,$

$cosy_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_1 = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k,\ k\epsilon z$

$y_1 = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,$ $\qquad$ $sinx_2 = \frac{1}{2}$

$y_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon z$ $\qquad$ $x_2 = (-1)^k arcsin\frac{1}{2} + \pi k,$

$cosy_2 = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k\epsilon z.$

$y_2 = \pm\, arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,$

$y_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon z.$

г) Чыгаруу: $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ tgx + tgy = 1, \end{cases}$ $tgx + tgy$ *ти төмөнкүдөй өзгөртүп алабыз.*

$$tgx + tgy = \frac{sinx}{cosx} + \frac{siny}{cosy} = \frac{sinx\cdot cosy + cosxsiny}{cosx\cdot cosy} = \frac{sin(x+y)}{\frac{cos(x+y)+cos(x-y)}{2}} =$$

$$\frac{2sin(x+y)}{cos(x+y)+cos(x-y)} = \frac{2sin\frac{\pi}{4}}{cos\frac{\pi}{4}+cos(x-y)} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+cos(x-y)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+cos(x-y)};$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+cos(x-y)} = 1, \end{cases} \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + cos(x-y), \end{cases} cos(x-y) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$x - y = \pm arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n$

$x - y = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$y = \frac{\pi}{4} - x,$

$x_1 - \left(\frac{\pi}{4} - x_1\right) = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$2x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n.$

Ушундай жол менен x_2 *ни* y_1, y_2 *ни табабыз.*

Жообу: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ \ y_1 = -\pi n$

$x_2 = -\pi n;\ \ y_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n.$

41. *Чыгаруу: а)* $2arctg(x^2 + x - 1) = \frac{\pi}{2},$

$arctg(x^2 + x - 1) = \frac{\pi}{4},$

$tg(arctg(x^2 + x - 1) = tg\frac{\pi}{4},$

$x^2 + x - 1 = 1,$

$x^2 + x - 2 = 0,$

$D = 1 + 8 = 9,$

$x_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2};$ $\qquad x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1.\ x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2,$

Жообу: $x_1 = 1;\ \ x_2 = -2.$

б) Чыгаруу: $2\,arcsin(x^2 - 7x + 13) = \pi$

$arcsin(x^2 - 7x + 13) = \frac{\pi}{2},$

$sin(arcsin(x^2 - 7x + 13) = sin\frac{\pi}{2}$

$x^2 - 7x + 13 = 1,$

$$x^2 - 7x + 12 = 0,$$
$$D = 49 - 48 = 1$$
$x_{1/2} = \frac{7\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{7\pm1}{2};\ \ x_1 = \frac{7+1}{2} = 4;\ \ x_2 = \frac{7-1}{2} = 3$

Жообу: $x_1 = 4;\ \ x_2 = 3.$

42. *Чыгаруу: а)* $\sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, *1-мисалдын чыгарылышын жана 28-сүрөттү пайдалангыла.*

$$\frac{\pi}{4} \leq 2x \leq \frac{3\pi}{4};\quad \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\quad n \in Z.$$
$$\frac{\pi}{8} + \pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi n,\quad n \in Z.$$

Жообу: $\frac{\pi}{8} + \pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi n,\quad n \in Z.$

б) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{3}\right) > 1,\ \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{3}\right) > \frac{1}{2}$, (28 *–сүрөттү пайдалангыла)*

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} + \frac{x}{3} < \frac{5\pi}{6},\quad \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} < \frac{x}{3} < \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3},$$
$$-\frac{\pi}{6} < \frac{x}{3} < \frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n < \frac{x}{3} < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$
$$-\frac{\pi}{2} + 6\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 6\pi n,\quad n \in Z.$$

Жообу: $-\frac{\pi}{2} + 6\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 6\pi n,\quad n \in Z.$

в) $4\sin 3x \cdot \cos 3x \leq \sqrt{2}$, *барабарсыздыктын сол жагын өзгөртүп түзөбүз.*

$2\sin 3x \cdot \cos 3x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$ | $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ *формуласын пайдаланабыз.*

$\sin 6x \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$

$-\frac{5\pi}{4} \leq 6x \leq \frac{\pi}{4},$

$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leq 6x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$

$-\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{3},$

Жообу: $-\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{3}.$

г) Чыгаруу: $2(\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin x) \leq \sqrt{3},$

$$\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\sin(\propto+\beta)=\sin\propto\cdot\cos\beta+$ $+\cos\propto\cdot\sin\propto$ *формуласын пайдаланып, өзгөртүп түзөбүз*

$$-\frac{4\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}+x\le\frac{\pi}{3},\quad -\frac{4\pi}{3}+2\pi n\le\frac{\pi}{6}+x\le\frac{\pi}{3}+2\pi n,$$

$$-\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi n,$$

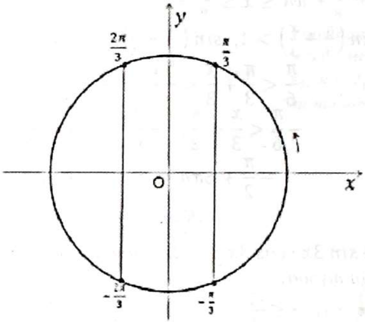
$$-\frac{5\pi}{3}+2\pi n\le x\le 2\pi n,\quad n\in Z.$$

Жообу: $-\frac{5\pi}{3}+2\pi n\le x\le 2\pi n,\quad n\in Z.$

43. Чыгаруу:

а) $2\cos x\ge 1$

$\cos x\ge\frac{1}{2}$, *сан айланасына байкоо жүргүзсөнөр* $x=\frac{1}{2}$ *түзүнүн оң жагындагы жаадагы тин маанилери барабарсыздыкты канааттандырат:*



$$-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$$

$-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in Z$ *чыгарылышы барабарсыздыктын жообу болот.*

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)<-\frac{1}{2}$ *сан айланасын пайдаланабыз.*

$\frac{2\pi}{3}<\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}<\frac{4\pi}{3},$

$\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{4},$

$\frac{5\pi}{12}+2\pi n<\frac{x}{2}<\frac{13\pi}{12}+2\pi n,$

$\frac{5\pi}{6}+4\pi n<x<\frac{13\pi}{6}+4\pi n,\ \ n\in Z.$

Жообу: $\frac{5\pi}{6} + 4\pi n < x < \frac{13\pi}{6} + 4\pi n, \ \ n \in Z.$

в) Чыгаруу: $2\cos 2x - \sqrt{3} \leq 0.$ *Сан айланасын пайдаланабыз.*

$\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$

$\frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{11\pi}{6},$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{11\pi}{6} + 2\pi n,$

$\frac{\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + \pi n,$

Жообу: $\frac{\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + \pi n.$

г) Чыгаруу: $\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{4} + x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{12} + 2\pi n,$$

Жообу: $-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z.$

44. Чыгаруу:

а) $\sqrt{3}\, tg\, x \geq 1,$

$tg\, x \geq \frac{1}{\sqrt{3}},$

$\sqrt{3}\, tg\, x \geq 1,$

$tg\, x \geq \frac{1}{\sqrt{3}},$

30-сүрөттөгү сан айланасын жана тангенстер сызыгын пайдалангыла.

$\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{6} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n,$

Жообу: $\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n. \ n \in Z.$

б) $tg\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) < \sqrt{3},$

$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + 3x < \frac{\pi}{3},$

$-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < 3x < \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4},$

сан айланасын жана тангенстер сызыгын пайдаланабыз.

$$-\frac{3n}{4}+\pi n<3x<\frac{\pi}{12}+\pi n,$$
$$-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3},$$
Жообу: $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3},\ \ n\in Z.$

в) $3tg(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2})\le\sqrt{3},$

алдынкы мисалдардын чыгарылышына көңүл бургула.

$$tg(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2})\le\sqrt{3},$$
$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{6},$$
$$-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3},$$
$$-\frac{5\pi}{6}+\pi n<\frac{x}{2}\le-\frac{\pi}{6}+\pi n,$$
$$-\frac{5\pi}{3}+2\pi n<x\le-\frac{\pi}{3}+2\pi n,$$
Жообу: $-\frac{5\pi}{3}+2\pi n<x\le-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

г) Чыгаруу: $\sqrt{3}tg2x+5\ge 8,$
$$\sqrt{3}tg2x\ge 3,$$
$$tg2x\ge\sqrt{3},$$
$$\frac{\pi}{3}\le 2x<\frac{\pi}{2},$$
$$\frac{\pi}{3}+\pi n\le 2x<\frac{\pi}{2}+\pi n,$$
$$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\le x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},$$
Жообу: $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\le x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.$

45. *Чыгаруу: а)* $3ctg2x-\sqrt{3}\le 0,$

$ctgx$ *функциясынын графигинен пайдаланабыз. (32-сүрөт)*

$$3ctg2x\le\sqrt{3},$$
$$ctg2x\le\frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\frac{\pi}{3}\le 2x<\pi,$$
$$\frac{\pi}{3}+\pi n\le 2x<\pi+\pi n,$$
$$\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2},$$
Жообу: $\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}.$

б) Чыгаруу:

$ctg\left(\frac{\pi}{6}+2x\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{3}},$

$0 < \frac{\pi}{6}+2x \leq \frac{2\pi}{3},$

$-\frac{\pi}{6} < 2x \leq \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6},$

$-\frac{\pi}{6}+\pi n < 2x \leq \frac{5\pi}{6}+\pi n,$

$-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2} < x \leq \frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, \ n \in Z.$

Жообу: $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2} < x \leq \frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, \ n \in Z.$

в) Чыгаруу: $\sqrt{3}ctg\frac{x}{3} \geq -1;$

$ctg\frac{x}{3} \geq -\frac{1}{\sqrt{3}},$

$0 < \frac{x}{3} \leq \frac{2\pi}{3},$

$\pi n < \frac{x}{3} \leq \frac{2\pi}{3}+\pi n,$

$3\pi n < x \leq 2\pi + 3\pi n,$

Жообу: $3\pi n < x \leq 2\pi + 3\pi n, n \in Z.$

г) Чыгаруу: $ctg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \leq -\sqrt{3}$

$\frac{5\pi}{6} \leq \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} < \pi,$

$\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} < \pi-\frac{\pi}{4},$

$\frac{7\pi}{12}+\pi n \leq \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}+\pi n, \ n \in Z,$

$\frac{7\pi}{6}+2\pi n \leq x < \frac{3\pi}{2}+2\pi n, n \in Z,$

Жообу: $\frac{7\pi}{6}+2\pi n \leq x < \frac{3\pi}{2}+2\pi n, n \in Z.$

46. *Чыгаруу: а)* $\lim\frac{5n-9}{3-2n} = \lim\frac{(5-\frac{9}{n})}{(3-\frac{2}{n})} = \frac{\lim(5-\frac{9}{n})}{\lim(5-\frac{2}{n})} = \frac{5}{3};$

б) $\lim\frac{5(3n^2+1)}{3-2n+5n^2} = \lim\frac{5(3+\frac{1}{n^2})}{\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n}+5} = \frac{5\lim(3+\frac{1}{n^2})}{\lim(\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n}+5)} = \frac{5\cdot 3}{5} = 3;$

в) $\lim\frac{7n^2-4n+5}{n^3+n^2+n} = \lim\frac{(\frac{7}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n^3})}{(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{\lim(\frac{7}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n^3})}{\lim(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{0}{1} = 0;$

г) $\lim\frac{3n^3+5n^2-1}{4-2n+7n^3} = \lim\frac{3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^3}}{\frac{4}{n^3}-\frac{2}{n^2}+7} = \frac{\lim(3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^3})}{\lim(\frac{4}{n^3}-\frac{2}{n^2}+7)} = \frac{3}{7}.$

47. *Чыгаруу:* $\lim x_n = 5, \quad \lim y_n = 3;$
$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = 5 + 3 = 8;$
$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = 5 \cdot 3 = 15;$
$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{5}{3}.$

48. *Чыгаруу:* а) $\lim\limits_{x\to1} 100x = 100 \cdot 1 = 100;$

б) $\lim\limits_{x\to2}(x^3 - 2x^2 + 5x - 7) = 2^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot 2 - 7 = 8 - 8 + 10 - 7 = 3;$

в) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{2x^2-6}{3x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to-2}(2x^2-6)}{\lim\limits_{x\to-2}(3x-5)} = \frac{2\cdot(-2)^2-6}{3(-2)-5} = \frac{8-6}{-6-5} = -\frac{2}{11};$

г) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2+3x-2}{2x^2-5x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to3}(x^2+3x-2)}{\lim\limits_{x\to3}(2x^2-5x+5)} = \frac{3^2+3\cdot3-2}{2\cdot3^2-5\cdot3+5} = \frac{9+9-2}{18-15+5} = \frac{16}{8} = 2;$

д)

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{9-x} - \sqrt{9+x}}{3x} =$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\left(\sqrt{9-x} - \sqrt{9+x}\right)\left(\sqrt{9-x} + \sqrt{9+x}\right)}{3x\left(\sqrt{9-x} + \sqrt{9+x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{9 - x - (9 + x)}{3x\left(\sqrt{9-x} + \sqrt{9+x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{(-2x)}{3x(\sqrt{9-x}+\sqrt{9+x})} = \frac{\lim\limits_{x\to0}(-2)}{\lim\limits_{x\to0} 3(\sqrt{9-x}+\sqrt{9+x})} =$$
$$= \frac{-2}{3(\sqrt{9-0}+\sqrt{9+0})} = \frac{-2}{3\cdot6} = -\frac{1}{9};$$

Туюнтманы өзгөртүп түзбөй туруп пределди эсептесек $\frac{0}{0}$ *аныксыздыгына ээ болобуз. Ошондуктан бөлчөктүн алымы менен бөлүмүн бир эле* $\sqrt{9-x} + \sqrt{9+x}$ *туюнтмасына көбөйтөбүз.*

е) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to3} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x\to3} \frac{x+1}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to3}(x+1)}{\lim\limits_{x\to3}(x-2)} = \frac{3+1}{3-2} =$
$= \frac{4}{1} = 4;$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim\limits_{x\to\infty}(x + 5) = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{t} + 5\right) =$
$= \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{t} + \lim\limits_{x\to0} 5 = 0 + 5 = 5$. *Бул мисалды чыгарууда* $x \to \infty$ *учурдагы пределге өтүүнү жаңы өзгөрмөнү киргизүү жолу менен ал өзгөрмө нөлгө умтулган пределге келтирдик башкача айтканда* $x = \frac{1}{t}$, $x \to \infty$ *учурда* ,
$t \to 0$ *болот.*

з) $lim\frac{5x^2+3x}{6x^2} = \lim_{t\to 0}\frac{5\cdot\frac{1}{t^2}+3\cdot\frac{1}{t}}{6\cdot\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{5+3t}{t^2}}{\frac{6}{t^2}} = \lim_{t\to 0}\frac{5+3t}{6} =$

$= \frac{\lim_{t\to 0}(5+3t)}{\lim_{t\to 0}6}3 = \frac{5}{6};$

49. *Чыгаруу: а)* $f(x) = 3x + 2,\ \ x_0 = 2,\ \ \Delta x = 0{,}01$

1) $x = x_0 + \Delta x,\ \ x = 2 + 0{,}01 = 2{,}01,$

2) $f(2{,}01) = 3\cdot 2{,}01 + 2 = 6{,}03 + 2 = 8{,}03,$

3) $f(2) = 3\cdot 2 + 2 = 8,$

4) $\Delta f = f(x) - f(x_0) = 8{,}03 - 8 = 0{,}03;$

б) $f(x) = \frac{3}{x};\quad x_0 = 3,\quad \Delta x = 0{,}1$

1) $x = 3 + 0{,}1 = 3{,}1,$

2) $f(3{,}1) = \frac{3}{3{,}1} \approx 0{,}97,$

3) $f(3) = \frac{3}{3} = 1,$

4) $\Delta f = f(3{,}1) - f(3) = 0{,}97 - 1 = -0{,}03;$

в) $f(x) = x^2 + 1\ \ x_0 = -1,\ \ \Delta x = 0{,}1;$

1) $x = -1 + 0.1 = -0{,}9\,,$

2) $f(-0{,}9) = (-0{,}9)^2 + 1 = 0{,}81 + 1 = 1{,}81,$

3) $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2,$

4) $\Delta f = f(-0{,}9) - f(-1) = 1{,}81 - 2 = -0{,}91;$

г) $f(x) = x^2 - 3x + 5,\ \ x_0 = 1,\ \ \Delta x = 0{,}2,$

1) $x = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$

2) $f(1{,}2) = 1{,}2^2 - 3\cdot 1{,}2 + 5 = 1{,}44 - 3{,}6 + 5 = 2{,}84$

3) $f(1) = 1^2 - 3\cdot 1 + 5 = 3$

4) $\Delta f = f(1{,}2) - f(1) = 2{,}84 - 3 = -0{,}16.$

~~50. $y = 2x - x^2$ функциясы берилсе:~~
~~а) $x = 8$, $\Delta x = 0{,}5$; б) $x = -2$, $\Delta = 0{,}3$ болгондо, берилген функциянын Δy өсүндүсүн тапкыла.~~

51. *Чыгаруу: а)* $f(x) = tg\ x,\qquad x_0 = \frac{\pi}{3},\ \ x = \frac{3\pi}{4},$

1) $\Delta x = x - x_0$, $\quad \Delta x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$,
2) $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = tg\frac{3\pi}{4} = tg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -ctg\frac{\pi}{4} = -1$,
3) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,
4) $\Delta f = f(x) - f(x_0) = -1 - \sqrt{3}$

б) $f(x) = cosx$, $\quad x_0 = \frac{2\pi}{3}$, $\quad x = \frac{5\pi}{6}$
1) $\Delta x = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$
2) $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = cos\frac{5\pi}{6} = cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
3) $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = cos\frac{2\pi}{3} = cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
4) $\Delta f = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) - f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$;

52. *Чыгаруу:* а) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) =$
$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2x - 2\Delta x$,
$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$
$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2x - 2\Delta x - x^2 + 2x =$
$2x\Delta x - 2\Delta x + \Delta x^2$,
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x - 2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x - 2 + \Delta x$,
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x - 2 + \Delta x) = 2x - 2$.
Жообу: $y' = 2x - 2$.

б) *Чыгаруу:* $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$,
$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$,
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \Delta x)} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$
$= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \Delta x}$,
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Жообу: $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

53. *Чыгаруу:*

а) $y = x^{12}$,	ж) $y = \frac{1}{x^4}$,

$y' = 12x^{11}$.

б) $y = 4x^9$,
$y' = (4x^9)' = 36x^8$.

в) $y = x^{-6}$,
$y' = (x^{-6})^1 = -6x^{-7}$.

г) $y = -2x^{-14}$,
$y' = (-2x^{-14})' = 28x^{-15}$.

д) $y = 6\sqrt{x}$,
$y' = (6\sqrt{x})^1 = 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$.

$y' = (\frac{1}{x^4})^1 = (x^{-4})^1 = -4 \cdot x^{-5}$.

з) $y = \frac{3}{x^{-4}}$;

$y' = \left(\frac{3}{x^{-4}}\right)' = (3x^4)' = 12x^3$

и) $y = \frac{5}{7\sqrt{x}}$,
$y' = \left(\frac{5}{7\sqrt{x}}\right)' = \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)' =$
$= \frac{5}{7} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{5}{14} x^{-\frac{3}{2}}$

к) $y = \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}$,
$y' = \left(\frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}\right)' = 4 \cdot \left(x^{-\frac{3}{5}}\right)' =$
$= 4 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot x^{-\frac{3}{5}-1} = -\frac{12}{5} \cdot x^{-\frac{8}{5}}$.

л) $y' = \left(-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)' = -2 \cdot \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' =$
$= -2 \cdot \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' =$
$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{2}{3} x^{-1\frac{1}{3}}$.

е) $y = 3\sqrt[3]{x^4}$
$y^1 = \left(3\sqrt[3]{x^4}\right)' = 3 \cdot \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' == 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1} = 4 \cdot x^{\frac{1}{3}}$.

54. Чыгаруу: Бул мисалдарды чыгарууда сумманын, көбөйтүндүнүн, даражанын жана бөлчөктүн туундусун табуу формулаларын колдонобуз.
а) $(3x^4 - 2x)' = (3x^4)' - (2x)' = 12x^3 - 2$;
б) $y' = (2x^{16} - x^8 + 3x^7 + 5x)' = 32x^{15} - 8x^7 - 21x^6 + 5$;

в) $y' = \left(5x^3 + 3\sqrt{x}\right)' = 15x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

г) $y' = \left(\frac{x}{3} - \frac{5}{3x^2} - x\sqrt{x}\right)' = \left(\frac{x}{3}\right)' - \left(\frac{5}{3} \cdot x^{-2}\right)' - \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' =$

$= \frac{1}{3} + \frac{10}{3x^3} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{10}{3x^3} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x};$

д) $y' = \left(\frac{2x-3}{5+x}\right)' = \frac{(2x-3)'\cdot(5+x)-(2x-3)\cdot(5+x)'}{(5+x)^2} = \frac{2(5+x)-(2x-3)}{(5+x)^2} =$

$= \frac{10+2x-2x+3}{(5+x)^2} = \frac{13}{(5+x)^2}.$

е) $y' = \left(\frac{3x-1}{2-4x}\right)' = \frac{(3x-1)'\cdot(2-4x)-(3x-1)(2-4x)'}{(2-4x)^2} = \frac{3(2-4x)+4(3x-1)}{(2-4x)^2} =$

$= \frac{8-12x+12x-4}{(2-4x)^2} = \frac{2}{(2-4x)^2};$

ж) $y' = \left(\sqrt{x} \cdot (x+3)\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot (x+3) + \sqrt{x} \cdot (x+3)' =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+3) + \sqrt{x} = \frac{x+3+2x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+3}{2\sqrt{x}};$

з) $y' = \left(\frac{x+2}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x+2)'\cdot\sqrt{x}-(x+2)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x}-(x+2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2x-x-2}{2\sqrt{x}}}{x} =$

$= \frac{x-2}{2x\sqrt{x}};$

и) $y' = ((2-x^2)\left(1+\sqrt{x}\right) = (2-x^2)' \cdot \left(1+\sqrt{x}\right) + \left(1+\sqrt{x}\right)'(2-x^2) =$
$= -2x\left(1+\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(2-x^2) = \frac{-4x\sqrt{x}-4x\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+2-x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{-4x\sqrt{x}-4x^2+2-x^2}{2\sqrt{x}} =$
$= \frac{2-4x\sqrt{x}-5x^2}{2\sqrt{x}};$

к) $y' = \left((x+x^3) \cdot \left(\sqrt[3]{x}-5\right)\right)' = (x+x^3)' \cdot \left(\sqrt[3]{x}-5\right) + \left(\sqrt[3]{x}-5\right)' \cdot$

$\cdot (x+x^3) = (1+2x^2)\left(\sqrt[3]{x}-5\right) + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot (x+x^3) =$

$= \sqrt[3]{x} - 5 + 6x^2\sqrt[3]{x} - 10x^2 + \frac{x+x^3}{3\sqrt[3]{x^2}} =$

$= \frac{3x - 15\sqrt[3]{x^2} + 6x^3 - 30x^2 + x + x^3}{3\sqrt[3]{x^2}} =$

$= \frac{4x + 7x^3 - 3x^2 - 15\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

55. *Чыгаруу: а)* $f(x) = 2x^2 - 5x$, $x = 2$ *жана* $x = -3$;
$f'(x) = (2x^2 - 5x)' = 4x - 5$; $f'(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 8 - 5 = 3$;

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3) - 5 = -12 - 5 = -17.$$

б) $f(x) = \frac{5-x}{3+x}$; $\quad x = 0$ *жана* $x = -1$;

$$f'(x) = \left(\frac{5-x}{3+x}\right) = \frac{(5-x)'(3+x)-(5-x)(3+x)'}{(3+x)^2} = \frac{-1\cdot(3+x)-(5-x)}{(3+x)^2} = \frac{-3-x-5+x}{(3+x)^2} =$$
$$= \frac{-8}{(3+x)^2};$$

$$f'(0) = \frac{-8}{(3+0)^2} = -\frac{8}{9},$$
$$f'(-1) = \frac{-8}{(3+(-1))^2} = -\frac{8}{4} = -2.$$

56. Чыгаруу: Татаал функциялардын туундуларын табуу формулаларын колдонобуз.

а) $y=(x^3 + 2)^4$,
$$y' = ((x^3 + 2)^4)' = 4(x^3 + 2)^3 \cdot (x^3 + 2)' =$$
$$= 4(x^3 + 2)^3 \cdot 3x^2 = 12x^2(x^3 + 2)^3;$$

б) $y = (2x^2 + 5x - 4)^6$,
$$y' = ((2x^2 + 5x - 4)^6)' = 6(2x^2 + 5x - 4)^5 \cdot (2x^2 + 5x - 4)' =$$
$$= 6(2x^2 + 5x - 4)^5 \cdot (4x + 5);$$

в) $y = \sqrt{3x-7}$, $\quad y' = \left(\sqrt{3x-7}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{3x-7}} \cdot (3x-7)' = \frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$

г) $y = \sqrt{5-2x}$; $\quad y' = \left(\sqrt{5-2x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{5-2x}} \cdot (5-2x)' =$
$$= \frac{1}{2\sqrt{5-2x}} \cdot (-2) = -\frac{1}{\sqrt{5-2x}};$$

д) $y = \sqrt{6x^2-5}$, $\quad y' = \left(\sqrt{6x^2-5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{6x^2-5}} \cdot (6x^2-5)' =$
$$= \frac{1}{2\sqrt{6x^2-5}} \cdot 12x = \frac{6x}{\sqrt{6x^2-5}};$$

е) $y = \sqrt{2x^3-3x}$, $\quad y' = \left(\sqrt{2x^3-3x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2x^3-3x}} \cdot (2x^3-3x)' =$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2x^3-3x}} - (6x^2-3) = \frac{6x^2-3}{2\sqrt{2x^3-3x}};$$

57. Чыгаруу: а) $y = 2\cos x$,
$$y' = (2\cos x)' = 2 \cdot (-\sin x) = -2\sin x;$$

б) $y = \frac{1}{3}sinx, \quad y' = \left(\frac{1}{3}sinx\right)' = \frac{1}{3} \cdot cosx;$

в) $y = 3tgx + 5, \ y' = (3tgx + 5)' = 3 \cdot \frac{1}{cos^2 x} = \frac{3}{cos^2 x};$

г) $y = 4sinx - cosx, \ y' = (4sinx - cosx)' = 4cosx - sinx =$
$= 4cosx + sinx;$

58. *Чыгаруу: а)* $y = tgx + sinx$

$y' = (tgx + sinx) = (tgx)' + (sinx)' = \frac{1}{cos^2 x} + cosx,$

б) $y = \frac{1}{2}sin(4x - \frac{\pi}{2}),$

$$y' = \left(\frac{1}{2}sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \left(\frac{1}{2}cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)' =$$
$$= 2cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = 2sin4x.$$

в) $y = 5x - tg(-3x); \ y = tgu, \ y' = (tgu)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u';$

$$y' = \left(5x - tg(-3x)\right)' = (5x)' - \left(tg(-3x)\right)' = 5 - \frac{1}{cos^2(-3x)} \cdot$$
$$\cdot (-3x)' = 5 + \frac{3}{cos^2 3x};$$

г) $y = 4sinx - cosx; \ y' = (u + \vartheta)';$

$y' = (4sinx - cosx)' = (4sinx)' - (cosx)' = 4cosx + sinx;$

59. *Чыгаруу: а)* $y = sin5x; \ y' = (sinu)' = cosu \cdot u';$

$y' = (sin5x)' = cos5x \cdot (5x)' = 5cos5x;$

б) $y = tg(-2x); \ y' = (tg - 2x))' = \frac{1}{cos^2(-2x)} \cdot (-2x)' = \frac{-2}{cos^2 2x};$

в) $y = 3ctg\left(-\frac{1}{3}x\right); \ \ y' = (ctgu)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$

$$y' = (3ctg\left(-\frac{1}{3}x\right)' = 3 \cdot \left(-\frac{1}{sin^2\left(-\frac{1}{3}x\right)}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}x\right)' =$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{sin^2\frac{1}{3}x} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{sin^2\frac{1}{3}x};$$

г) $y = \frac{1}{4}cos4x, \qquad y' = (cosu)' = -sinu \cdot u';$

$y' = \left(\frac{1}{4}cos4x\right)' = \frac{1}{4}(-sin4x) \cdot (4x)' = -\frac{1}{4}sin4x \cdot 4 = -cos4x;$

60. *Чыгаруу: а)* $y = x^2 \cdot cosx; \ \ (u \cdot \vartheta)' = u' \cdot \vartheta + u \cdot \vartheta';$

$$y' = (x^2 \cdot cosx)' = (x^2)' \cdot cosx + x^2 \cdot (cosx)' =$$

$$= 2x \cdot cosx + x^2 \cdot (-sinx) = 2x \cdot cosx - x^2 \cdot sinx;$$

б) $y = \sqrt{x} \cdot sinx; \quad y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

$$y' = \left(\sqrt{x} \cdot sinx\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot sinx + \sqrt{x} \cdot (sinx)' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot sinx + \sqrt{x} \cdot cosx;$$

в) $y = \frac{sin2x}{x}; \qquad \left(\frac{u}{\vartheta}\right)' = \frac{u' \cdot \vartheta - u \cdot \vartheta}{\vartheta^2};$

$$y' = \left(\frac{sin2x}{x}\right)' = \frac{(sin2x)' \cdot x - x' \cdot sin2x}{x^2} = \frac{2x \cdot cos2x - sin2x}{x^2} = \frac{(2x-1) \cdot sin2x}{x^2};$$

г) $y = \frac{x}{cosx};$

$$y' = \left(\frac{x}{cosx}\right)' = \frac{x' \cdot cosx - x \cdot (cosx)'}{cos^2x} = \frac{cosx + x \cdot sinx}{cos^2x}.$$

61. а) $y = sin^2x + cos^2x; \quad sin^2x + cos^2x = 1,$

$$y' = (sin^2x + cos^2x)' = 1' = 0;$$

б) $y = sin3x \cdot cos2x + cos3x \cdot sin2x;$

$$y' = (sin3x \cdot cos2x + cos3x \cdot sin2x)' = (sin5x)' = cos5x \cdot (5x)' = 5cos5x;$$

| $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta;$ |

в) $y = cos^2 3x - sin^2 3x;$

$$y' = (cos^2 3x - sin^2 3x)' = (cos6x)' = -sin6x \cdot (6x)' = - - 6sin6x;$$

| $cos2x = cos^2x - sin^2x$ *формуласын колдонобуз.*

г) $y = sin5x \cdot cos5x; \quad sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha,$

$$y' = (sin5x \cdot cos5x)' = \frac{1}{2}(sin10x)' = \frac{1}{2}cos10x \cdot (10x)' = 5cos10x.$$

62. *Чыгаруу: а)* $y = \sqrt{tgx};$

$$y' = \left(\sqrt{tgx}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{tgx}} \cdot (tgx)' = \frac{1}{2\sqrt{tgx}} \cdot \frac{1}{cos^2x} = \frac{1}{2cos^2x\sqrt{tgx}}$$

б) $y = \sqrt{3sinx - 1}; \quad y' = \left(\sqrt{3sinx - 1}\right)' =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3sinx-1}} \cdot (3sinx - 1)' = \frac{1}{2\sqrt{3sin-1}} \cdot 3cosx = \frac{3cosx}{2\sqrt{3sinx-1}};$$

в) $y = \sqrt[4]{sinx} \quad y' = \left(\sqrt[4]{sinx}\right)' = \frac{1}{4\sqrt[4]{sin^3x}} \cdot (sinx)' = \frac{cosx}{4\sqrt[4]{sin^3x}};$

г) $y = \sqrt[3]{cosx + 3};$

$$y' = \left(\sqrt[3]{cosx+3}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(cosx+3)^2}} \cdot (cosx+3)' = -\frac{sinx}{3\sqrt[3]{(cosx+3)^2}}.$$

63. Чыгаруу: а) $y = si\,n\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$;

$$y' = \left(sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right)' = cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)' = -3\,cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\right);$$

б) $y = co\,s\left(\frac{\pi}{6} + 5x\right)$;

$$y' = \left(cos\left(\frac{\pi}{6} + 5x\right)\right)' = -\,sin\left(\frac{\pi}{6} + 5x\right)' = -5\,sin\left(\frac{\pi}{6} + 5x\right);$$

в) $y = tg\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$;

$$y' = \left(tg\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right)' = \frac{1}{cos^2(\frac{\pi}{3}+x)} \cdot \left(\frac{\pi}{3} + x\right)' = \frac{1}{cos^2(\frac{\pi}{3}+x)};$$

г) $y = ctg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

$$y' = \left(ctg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)' = \frac{1}{sin^2(\frac{\pi}{3}+x)} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - x\right)' = -\frac{1}{sin^2(\frac{\pi}{3}+x)};$$

64. Чыгаруу: $s = 7t - 3$. $S(t)$ *- өтүлгөн жолдун узундугунан* t *боюнча туунду алабыз, ал чекиттин ылдамдыгын туюндурат.*

$V(t) = S'(t) = (7t-3)' = 7\,\frac{\text{уз}\cdot\text{бирд}}{\text{сек}}$;

Жообу: $7\,\frac{\text{уз}\cdot\text{бирд}}{\text{сек}}$.

65. Чыгаруу: $S = 4t^2 - 2t + 3$; $V(t_0) = S'(t_0)$ *формуласын пайдаланабыз.*

$V(t) = S'(t) = (4t^2 - 2t + 3) = 8t - 2$.

а) $t = 6\text{сек}$, $V(4) = 8 \cdot 6 - 2 = 46\text{м/сек}$.

б) $t = 10\text{сек}$, $V(10) = 8 \cdot 10 - 2 = 78\text{м/сек}$.

Жообу: а) $V = \frac{46\text{м}}{\text{сек}}$ б) $V = 78\text{м/сек}$.

66. Чыгаруу: $S = \frac{2}{3}t^3 - 5t^2 - 12t + 5$,

$$V(t) = S'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 5t^2 - 12t + 5\right)' = 2t^2 - 10t - 12,$$

Убакыттын кайсы моментинде ылдамдыктын нөлгө барабар болушун табуу үчүн,

$2t^2 - 10t - 12 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$t^2 - 5t - 6 = 0$, $D = 25 + 4 \cdot 6 = 49$

$t_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$,

$t_1 = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$сек.

Жообу: 6 секундадан кийин кыймыл токтойт.

67. *Чыгаруу:* $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $[-2; 2]$.

$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x,$

$f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2,$

$f'(-2) = -2,$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *формуласы боюнча жаныманын теңдемесин түзөбүз.*

$y = 2 - (-2)\big(x - (-2)\big) = 2 - 2(x + 4) = 2 - 2x - 8 = -2x + 6;$

Жообу: $y = -2x + 6.$

68. *Чыгаруу: а)* $f(x) = 2sinx,\ x_0 = \frac{\pi}{6};$

$f'(x) = (2sinx)' = 2cosx,$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot sin\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$

$f'(\frac{\pi}{6}) = 2cos\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$

$y = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)(x - \frac{\pi}{6}),$

$y = 1 + \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6}.$

Жообу: $y = 1 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6}.$

б) $f(x) = 3 + cosx,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$ $\quad f'(x) = (3 + cos\,x)' = -sin\,x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -sin\frac{\pi}{2} = -1,$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$

$y = 3 - 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 3 - x + \frac{\pi}{2}.$

Жообу: Жаныманын теңдемеси $y = 3 + \frac{\pi}{2} - x.$

в) $f(x) = tgx,\ x_0 = \frac{\pi}{4};\ f'(x) = (tgx)' = \frac{1}{cos^2 x},$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = tg\frac{\pi}{4} = 1,$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{(cos\frac{\pi}{4})^2} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{\frac{2}{4}} = 2,$

$y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'^{\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2x - \frac{\pi}{2},$

Жообу: Жаныманын теңдемеси $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$.

г) $f(x) = -2cosx,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$.

$f'(x) = -2 \cdot (-sinx) = 2sinx$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2cos\frac{\pi}{3} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}\right.$.

Жообу: Жаныманын теңдемеси. $y = -1 + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

69. Чыгаруу: а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x)' = 3x^2 - 6x + 3$

Жаныма абсциссалар огуна паралель болуш үчүн, бурчтук коэффицент $k = 0$ *болуш керек.*

Демек, $3x^2 - 6x + 3 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз*

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$D = 4 - 4 \cdot 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{2}{2} = 1;\quad x = 1$ *болгондо, функциянын маанисин табабыз.*

Демек, $(1; 1)$ *чекитинен өткөн жаныма* Ox *огуна паралель болот.*

б) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 16x$

$f' = (x) = \left(\frac{1}{2}x^4 + 16x\right)' = 2x^3 + 16$.

$2x^3 + 16 = 0$

$x^3 = -8$

$x = \sqrt[3]{-8}$

$x = -2$.

$$f(-2) = \frac{1}{2}(-2)^4 + 16 \cdot (-2) = \frac{1}{2} \cdot 16 + (-32) = 8 - 32 = -24.$$

Демек, (–2, –24) чекитине жүргүзүлгөн жаныма Ox *огуна параллель болот.*

в) $(x) = sin2x + \sqrt{3}x$

Чыгаруу: $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}x,$ $\qquad f'(x) = (\sin 2x - \sqrt{3}x)' == 2cos2x - \sqrt{3},$

$$f'(x) = 0, \qquad 2cos2x - \sqrt{3} = 0 \quad cos2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = \pm arc\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, \qquad n \in z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{12} + \pi n, \qquad n\epsilon z$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = sin2 \cdot \frac{\pi}{12} + \sqrt{3}\frac{\pi}{12}; \;\; f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\pi}{12};$$

Жообу: $(\frac{\pi}{12} + \pi n;\ \frac{1}{2} + \sqrt{3}(\frac{\pi}{12} + \pi n))$ *жана* $(-\frac{\pi}{12} + \pi n, -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(-\frac{\pi}{12} + \pi n\right))$ *чекиттери аркылуу жүргүзүлгөн жанымалар Ox огуна параллель болот.*

г) $f(x) = cos(x - \frac{\pi}{3})$.

Чыгаруу: $f(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$

$$f'(x) = \left(cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \quad f'(x) = 0,$$

$$-\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \pi n, \;\; n \in z, \qquad x = \frac{\pi}{3} + \pi n$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) cos\, 0 = 1.$$

Жообу: $(\frac{\pi}{3} + \pi n; 1)$ *чекиттеринде жүргүзүлгөн жанымалар Ox огуна параллель болот.*

70. *а) Чыгаруу:* $f(x) = 3x - x^3$ *функциясынын графигинин Ox огу менен кесилилүүчү чекиттерин табабыз. Ал үчүн* $3x - x^3 = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$$x(3 - x^2) = 0$$

$$x = 0$$

$$3 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 3$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$
Эми функциянын туундусун табабыз жана x=0, $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$ *чекиттеринде анын маанилерин табабыз.*
$$f'(x) = (3x - x^3) = 3 - 3x^2,\ tg \propto = 3 - 3x^2,$$
$$tg \propto = 3 - 3 \cdot 0^2 = 3, \quad \propto = arc\,tg\,3;$$
$$tg\ \propto = 3 - 3(\sqrt{3})^2 = 3 - 9 = -6$$
$$tg \propto = 3 - 3 \cdot (-\sqrt{3})^2 = -6$$
$$tg \propto = -6, \quad \propto = \pi - arc\,tg\,6;$$
Жообу: *(0,0)чекитинде,* $arc\,tg3; (-\sqrt{3}; 0)$ *жана* $(\sqrt{3}; 0)$ *чекитинде, arc tg 3;*$(\sqrt{3}; 0)$ *чекиттеринде* $\pi - arc\,tg6$ *бурчтарын түзүп, жанымалар Ох огу менен кесилишет.*

б)Чыгаруу: $f(x) = -cosx$, *алдынкы мисалды чыгарган жолдорду пайдаланабыз.*
$-cosx = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*
$x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n$
$f'(x) = (-cosx)' = sinx,$

$tg\alpha = sinx;\quad x = \frac{\pi}{2};\quad x = -\frac{\pi}{2}$ *чекиттеринде туундунун маанилерин табабыз.*
$tg\alpha = sin\frac{\pi}{2},$
$tg\alpha = 1$
Демек, $\alpha = \frac{\pi}{4};$
$tg\alpha = sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\ tg\alpha = -1$
$\alpha = \frac{3\pi}{4};$
Жообу: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n, 0\right)$ *чекиттеринде* $\frac{\pi}{4}$; $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, 0\right)$ *чекиттеринде* $\frac{3\pi}{4}$ *бурчтарын түзүп, Ох огу менен кесилишет.*

71. Чыгаруу: $f(x) = x^3;\ A(-1;-1);\ B(2,8).$
Бул функцияны $[-1; 2]$ *кесиндисинде карайбыз.*
$f'(x) = 3x^2$,*Кесиндинин учтарындагы функциянын маанилерин эсептейбиз.*
$f(-1) = (-1)^3 = -1;\quad f(2) = 2^3 = 8.$

С чекитин табууда Лагранждын формуласын пайдаланабыз

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ *же* $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

$f(2) - f(-1) = f'(c)\big(2 - (-1)\big)$, $8 - (-1) = 3 \cdot c^2(2 - (-1))$,

$9 = 9c^2$

$c^2 = 1$

$c_1 = -1$

$c_2 = 1$

демек $C_1(-1; -1)$; $C_2(1; 1)$.

Жообу: $C_1(-1; -1)$; *жана* $C_2(1; 1)$ *чекиттерине жүргүзүлгөн жанымалар* AB *хордасында параллель.*

72. *Чыгаруу:* $y = 4x - 3$ *түз сызыгынын бурчтук коэффиценти* $k = 4$. *Бул түз сызыкка параллель болгон* $f(x) = x^3 + x$ *функциясынын графигине жүргүзүлгөн жанымалардын бурчтук коэффиттери да 4 кө барабар болууга тийиш.* $f(x)$ *функциясынын туундусу жанымалардын бурчтук коэффицентин туюндургандыктан* $f'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1$, $3x^2 + 1 = 4$ *теңдмесине ээ болобуз. Бул теңдемени чыгарып жанымалардын абоциссаларын табабыз.*

$3x^2 + 1 = 4$

$3x^2 = 4 - 1$

$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$, $x = \pm\sqrt{1}$.

$x_1 = -1$

$x_2 = 1$

Эми жанымалардын ординаталарын табабыз.

$f(-1) = (-1)^3 + (-1) = -1 - 1 = -2$;

$f(1) = 1^3 + 1 = 1 + 1 = 2$.

Жообу: $(1; 2)$ *жана* $(-1; -2)$ *чекиттерине жүргүзүлгөн жанымалар* $y = 4x - 3$ *түз сызыгына параллель болушат.*

73. *Чыгаруу:* $x(t) = 2t^3 + t + 1$ *кыймыл законунан* t *боюнча алнган биринчи тартиптеги туунду ылдамдкты туюндурат.*

$$v(t) = x'(t) = (2t^3 + t + 1)' = 6t^2 + 1,$$

Экинчи тартиптеги алынган туунду ылдамдануну туюндурат. (W – ылдамдануу)

$$W = V'(t) = x''(t) = (6t^2 + 1)' = 12t,$$

Демек, ылдамдануу $W(t) = 12t$ см/с^2.

а) $t = ?$ $12t = 1$см/с^2

$t = \frac{1}{12}$ сек.

б) $12t = 2$см/с^2

$t = \frac{2}{12}$ *сек*

$$t = \frac{1}{6}сек.$$

Жообу: а) $t = \frac{1}{12}$ сек, б) $t = \frac{1}{6}$ сек.

($x(t)$ *-сантиметр менен алынган которулуш,*
t-убакыт секунда менен).

74. *Чекит* $S(t) = -\frac{t^3}{3} + 6t^2 - 7$ *закону боюнча түз сызыктуу кыймылдайт.*

$S'(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + 6t^2 - 7\right)' = -\frac{3t^2}{3} + 12t = -t^2 + 12t$

Демек, ылдамдык $V(t) = -t^2 + 12t$ м/сек

Ылдамдануу $W = \left(V(t)\right)' = (-t^2 + 12t)' = -2t + 12$ м/с^2

$W = 0$ *болгон учурдагы* t *моментин табабыз.*

$-2t + 12 = 0,$

$-2t = -12,$

$t = -12:(-2),$

$t = 6$с. *демек 6 -секундада ылдамдануу 0 го барабар болот.*

Эми $t = 6$с *моментиндеги ылдамдыкты табабыз.*

$V(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 = -36 + 72 = 36$м/с.

Жообу: $t = 6$с, $V(6) = 36$м/с.

75. *Чыгаруу: а) Гармоникалык термелүү*

$S(t) = sin\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ *закону менен берилгендиктен,* $S(t)$ *тин биринчи туундусу чекиттин ылдамдыгы, экинчи тартиптеги туундусу анын ылдамдануусу болот.*

$$S'(t) = \left(sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(3t + \frac{\pi}{3}\right)' =$$

$$= 3cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) = V(t),$$

$$S''(t) = \left(3\,cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)\right)' =$$

$$= -3sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)' = -9sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) = W(t).$$

Жообу: $V(t) = 3cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$, $W(t) = -9sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$.

б) $S = 3co\,s(2t + 7),$

$V(t) = S'(t) = (3cos(2t + 7))' = -3sin(2t + 7)(2t + 7)' =$

$$= -6sin(2t+7).$$

$$W(t) = S''(t) = (-6sin(2t+7))' = -6cos(2t+7)(2t+7)' == -12cos(2t+7).$$

Жообу: $V(t) = -6sin(2t+7)$,

$W(t) = -12cos(2t+7)$.

76. *Чыгаруу: а)* $y' = (x^4)' = 4x^3, \ y'' = (x^4)' = 12x^2;$

б) $y' = (3x^3 - 2x^2 + 4x - 1)' = 9x^2 - 4x + 4;$

$$y'' = (9x^2 - 4x + 4) = 18x - 4;$$

в) $y' = (x^7 + 5x^2)' = 7x^6 + 10x,$

$$y'' = (7x^6 + 10x)' = 42x^5 + 10;$$

г) $y' = (sin3x)' = cos\,3x \cdot (3x)' = 3\,cos\,3x, \quad y'' = (cos\,3x) = \ = -9\,sin\,3x;$

д) $y' = (2cos^2x)' = 4cosx \cdot (cosx)' = -4cosx \cdot sinx = -2sin2x;$

$y'' = (-2sin2x)' = -2cos2x \cdot (sin2x)' = -4cos2x \cdot cos2x = \ = -4cos^2 2x;$

е) $y' = (tg\,x)' = \frac{1}{cos^2x};$

$$y'' = \left(\frac{1}{cos^2x}\right)' = -\frac{(cos^2x)\prime}{(cos^2x)^2} = -\frac{-2sin\,x \cdot cosx}{cos^4x} = tg\,x \cdot \frac{2}{cos^2x}.$$

77. *Чыгаруу: а)* $f(x) = 6x - 1$, *фугкциясынын туундусун табабыз.*

$f'(x) = (6x-1)' = 6$, *туунду сан түз сызыгында оң, демек функция* $(-\infty; +\infty)$ *аралыгында өсүүчү. (1-теореманын негизинде)*

Жообу: $(-\infty; +\infty)$ *аралыгында өсүүчү.*

б) $f(x) = 5 - 3x;$ $f'(x) = (5-3x)' = -3$, *туунду сан түз сызыгында терс, демек функция* $(-\infty; +\infty)$ *аралыгында кемүүчү. (2-теореманын негизинде)*

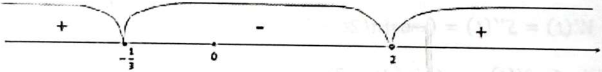
Жообу: $(-\infty; +\infty)$ *аралыгында кемүүчү.*

в) Чыгаруу: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5,$

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4;$ *1-теорема боюнча* $f'(x) > 0$ *болгон аралыкта функция өсөт.*

$3x^2 - 4x - 4 > 0$ *барабарсыздыгын интервалдар методу менен чыгарабыз* $3x^2 - 4x - 4 = 0, \ D = 64$

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -\frac{1}{3};$$



Интервалдардагы '$f'(x)$ *туундусунун белгилерин аныктайбыз анда,* $(-\infty; -\frac{1}{3})$ *жана* $(2; -\infty)$ *аралыктарында* $f'(x) > 0$ *экендигин,* $(-\frac{1}{3}; 2)$ *аралыгында* $f'(x) < 0$ *экендигин табабыз.*

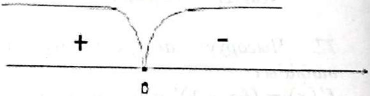
Демек, $(-\infty; -\frac{1}{3})$ *жана* $(2; +\infty)$ *аралыгында* $f(x)$ *функциясы өсөт, 2 – теореманын негизинде* $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$ *аралыгында функция кемийт.*

Жообу: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$, $(2; +\infty)$ *аралыктарында функция өсүүчү.*

$\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$ *аралыгында функция кемүүчү.*

г) Чыгаруу: $f(x) = \frac{4}{x^2}$; $f'(x) = \left(\frac{4}{x^2}\right)' = -\frac{4\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} = -\frac{8x}{x^4} = -\frac{8}{x^3}$ *да 0 дө аныкталбайт.*

$f'(x)$ туундусу $(-\infty; 0)$ аралыгында оң, $(0, +\infty)$ аралыгында терс болот. Ошондуктан 1 – теореманын негизинде $(-\infty; 0)$ аралыгында



функция өсөт, 2 - теореманын негизинде $(0; +\infty)$ *аралыгында функция кемийт.*

Жообу: $(-\infty; 0)$ *аралыгында функция өсүүчү*

$(0; +\infty)$ *аралыгында функция кемүүчү.*

д) Чыгаруу: $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$, $3x^2$ *туюнтмасы* x *тин бардык маанилеринде оң болот.*

Ошондуктан $f(x) = x^3$ *функциясы* $(-\infty; +\infty)$ *аралыгында өсүүчү болот.*

Жообу: Функция $(-\infty; +\infty)$ *аралыгында өсүүчү.*

78. *Чыгаруу: а)* $f(x) = x^3 - 3x + 7$,

$$f'^{(x)} = (x^3 - 6x + 7)' = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 = 3$$

$x^2 = 1 \ x_1 = -1, \ x_2 = 1$

Демек, сыналуучу чекиттер $x_1 = -1$ *жана* $x_2 = 1$ *болот. Эми функциянын 2 – тартиптеги туундусун табабыз:* $f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x;$

$f''(x)$ *тин сыналуучу чекиттердеги белгилерин аныктайбыз.*

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0,$

$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0;$

Экстремумдун 2 – жетиштүү шартынын негизинде функция $x = -1$ *чекитинде максимумга,*

$x = 1$ *чекитинде минимумга ээ болот.*

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 7 = -1 + 3 + 7 = 9$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 7 = 1 - 3 + 7 = 5$

Жообу: $x_{max} = -1, \ x_{min} = 1; \ f(-1)_{max} = 9, \ f(1)_{min} = 5.$

б) $f(x) = x^2(x-2);$

Чыгаруу: $f(x) = x^2(x-2);$ *туундусун таап, сыналуучу чекиттерин табабыз*

$f'(x) = \left(x^2(x-2)\right)' = (x^3 - 2x^2)' = 3x^2$ *-4x=3* $x^2 - 4x = 0,$

$x(3x-4) = 0, \ x_1 = 0, \ x_2 = \frac{4}{3}.$

Демек, сыналуучу чекиттер $x_1 = 0$ *жана* $x_2 = \frac{4}{3}$

f функциясынын 2-тартиптеги туундунун табабыз.

$$f''(x) = (3x^2 - 4x)' = 6x - 4$$

$f''(x)$ *тин сыналуучу чекиттердеги белгилерин аныктай-быз.*

$f''(0) = 6 \cdot 0 - 4 = -4; \quad f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \cdot \frac{4}{3} - 4 = 8 - 4 = 4.$

$f''(0) < 0,$ *демек x=0 чекиттеринде функция максимумга,*

$f\left(\frac{4}{3}\right) > 0,$ *демек* $x = \frac{4}{3}$ *чекитинде функция минимумга ээ болот.*

$$f(0) = 0^2(0+2) = 0.$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3} - 2\right) = \frac{16}{9} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{27},$$

Жообу: $x_{max} = 0, \ x_{min} = \frac{4}{3}, \ f(0)_{max} = 0, \ f\left(\frac{4}{3}\right)_{min} = -\frac{32}{27}$

в) $f(x) = x - 3\sqrt{x};$

Чыгаруу: $f(x) = x - 3\sqrt{x}, \quad f'(x) = \left(x - 3\sqrt{x}\right)',$

$f'(x) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$; *эми сыналуучу чекиттерди табабыз.*

$1 - \frac{3}{2\sqrt{x}} = 0,$

$\frac{2\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}} = 0.$

$2\sqrt{x} - 3 = 0, \quad \sqrt{x} = \frac{3}{2}, \quad x = \frac{9}{4}$ *бул сыналуучу чекит.*

Эми функциянын 2-тартиптеги туундусун табабыз.

$$f''(x) = \left(1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)' = -\frac{3}{2} \cdot \frac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{3}{4x\sqrt{x}}$$

$f''(x)$ *тин сыналуучу чекиттердеги белгилерин аныктабыз.*

$f''\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{3}{4 \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{\frac{9}{4}}} = -\frac{3}{9 \cdot \frac{3}{2}} = -\frac{3}{\frac{27}{2}} = -\frac{2}{9} < 0$ *демек* $x = \frac{9}{4}$ *чекитинде функция максимумга ээ болот.*

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} - 3 \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4};$$

Жообу: $x_{max} = \frac{9}{4}$; $f\left(-\frac{9}{4}\right)_{max} = -\frac{9}{4}$; *минимум жок.*

г) $f(x) = cos2x + x.$

Чыгаруу: $f(x) = cos2x + x,$ *туундусун таап, андан кийин сыналуучу чекиттерди табабыз*

$f'(x) = (cos2x + x)' = -2sin2x + 1$

$-2sin2x + 1 = 0,$

$sin2x = \frac{1}{2},$

$2x = (-1)^k arc\,sin\frac{1}{2} + \pi k,$

$2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \pi k,$$

Демек, $x_1 = \frac{\pi}{12}$, $x_2 = \frac{13\pi}{12}$ *чекиттери сыналуучу чекиттер болот.*

Эми функциянын экинчи тартиптеги туундусун табабыз.

$f''(x) = (-2sin2x + 1)' = -4\cos 2x,$

$f''(x)$ *тин сыналуучу чекиттердеги маанилерин аныктайбыз.*

$$f''\left(\frac{\pi}{12}\right) = -4cos2\cdot\frac{\pi}{12} = -4\cos\frac{\pi}{6} = -4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

$$f''\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -4cos2\cdot\frac{13\pi}{12} = -4\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Демек, $x_1 = \frac{\pi}{12}$ *де максимум,* $x_2 = \frac{13\pi}{12}$*де минимум болот.*

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = cos2\cdot\frac{\pi}{12} + x = cos\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$$

$$f\left(\frac{13\pi}{12}\right) = cos\frac{13\pi}{6} + \frac{13\pi}{12} = cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{13\pi}{12} =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} + \frac{13\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{13\pi}{12}.$$

Жообу: $x_{max} = \frac{\pi}{12}$, $x_{min} = \frac{13\pi}{12}$;

$f(x)_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$; $f(x)_{min} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{13\pi}{12}$.

79. Төмөнкү функциялардын көрсөтүлгөн кесиндилерди эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.

Чыгаруу: а) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5$, $[0;2]$;

Адегенде функиянын туундусун таап алабыз.

$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5\right)' = x^3 - x^2$,

$x^3 - x^2 = 0$ *теңдемесин чыгарып сыналуучу*

$x^2(x-1) = 0$ *чекиттерди табабыз.*

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Эми функциянын 2 –туундусун табабыз.

$f''(x) = (x^3 - x^2)' = 3x^2 - 2x$,

$f''(x)$ *тин сыналуучу чекиттердеги белгилерин аныктайбыз.*

$f''(0) = 3\cdot 0^2 - 2\cdot 0 = 0$

$f''(1) = 1$

Демек, $x_1 = 0$ *чекитинде максимум да минимум да эмес.*

$x_2 = 1$ *чекитинде минимумга функция ээ болот.*

$f(0) = \frac{1}{4}\cdot 0^4 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 + 5 = 5$,

$f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{3}\cdot 2^3 + 5 = 4 - 2\frac{2}{3} + 5 = 6\frac{1}{3}$;

$f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 5 = 4\frac{11}{12}$,

Жообу: $x_{max} = 2,\ x_{min} = 1,$

$$f(2)_{max} = 6\frac{1}{3},\ f(1)_{min} = 4\frac{11}{12}.$$

б) $f(x) = (2x^3 - 3x^2 - 72x + 7) = 6x^2 - 6x - 72$,

Сыналуучу чекиттерин табабыз.

$6x^2 - 6x - 72 = 0,\ x^2 - x - 12 = 0,\ D = 1 + 4 \cdot 12 = 49$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2},\ x_1 = \frac{1+7}{2} = 4,\ x_2 = \frac{1-7}{2} = -3.$

2 – туундуну табабыз: $f''(x) = (6x^2 - 6x - 72) = 12x - 6;$

$f''(x)$ *тин сыналуучу чекиттердеги белгилерин аныктайбыз.*

$f''(4) = 12 \cdot 4 - 6 = 48 - 6 = 42$

$f''(-3) = 12 \cdot (-3) = -36 - 6 = -42$

Демек, $x = 4$ *чекитинде функция минимумга,* $x = -3$ *чекитинде максимумга ээ болот.*

Эми кесиндинин учтарында жана сыналуучу чекиттерде $f(x)$ *тин маанилерин табабыз.*

$f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 72 \cdot (-3) + 7 =$

$= -54 - 27 + 216 + 7 = 142,$

$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 72 \cdot 4 + 7 = 128 - 48 - 288 + 7 = -203.$

Жообу: $x_{max} = -3,\ x_{min} = 4,$

$$f(-3)_{max} = 142,\ f(4)_{min} = -203.$$

в) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}, \qquad [-6; 8],$

$$f'(x) = \left(\sqrt{100 - x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{100-x^2}} \cdot (100 - x^2)' = -\frac{2x}{2\sqrt{100-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}.$$

Сыналуучу чекиттерди табабыз.

$$-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}} = 0, \qquad x = 0 \text{ чекити сыналуучу чекит.}$$

2–туундуну табабыз: $f''\left(-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}\right)' = -\frac{x'\sqrt{100-x^2} - x \cdot \left(\sqrt{100-x^2}\right)'}{(\sqrt{100-x^2})^2} =$

$$= -\frac{\sqrt{100-x^2} - \frac{x \cdot (-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2} = -\frac{\frac{100-x^2+x^2}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2} = -\frac{100}{(100-x^2)\sqrt{100-x^2}};$$

$f''(x)$ *тин сыналуучу чекиттердеги белгилерин аныктайбыз.*

$f''(0) = -\frac{100}{(100-0^2)\sqrt{100-0^2}} = -\frac{100}{100:10} = -\frac{1}{10},$

демек, $x = 0$ *чекитинде функция максимумга ээ болот.*
Кесиндинин учтарында жана сыналуучу чекитте функциянын маанилерин табабыз.

$f(0) = \sqrt{100 - 0^2} = \pm 10,$
$f(-6) = \sqrt{100 - (-6)^2} = \sqrt{64} = \pm 8,$
$f(8) = \sqrt{100 - 8^2} = \sqrt{36} = \pm 6,$
Жообу: $x_{max} = 0,\ f(0)_{max} = 10,\ x_{min} = -6,\ f(-6)_{min} = -8$

Чыгаруу: г) $f(x) = cos3x - 3cosx,\ [-\frac{3\pi}{2}; 0]$

$$f'(x) = (cos3x - 3cosx)' = -3sin3x + 3sinx,$$

Сыналуучу чекиттерди табабыз.

$-3sin3x + 3sinx = 0,$ | $sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha + \beta}{2}$
$sin3x - sinx = 0,$
$2sinx \cdot cos2x = 0,$ | формуласы пайдаланылды

$sinx = 0,$ $\quad$ $cos2x = 0,$
$x = \pi n\ ;$ $\quad$ $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$
$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};$

$x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \pi,\ x_3 = \frac{3\pi}{4}$ *сыналуучу чекиттери берилген* $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$ *кесиндисинде жатпайт.*
Ошондуктан $f(x)$ *функциясынын маанилерин кесиндинин учтарында аныктайбыз.*

$$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) - 3cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= cos\frac{\pi}{2} + 3 \cdot cos\frac{\pi}{2} = 0 - 0 = 0.$$
$$f(0) = cos0 - 3 \cdot cos0 = 1 - 3 = -2.$$

Ошентип максимум чекит жок (берилген кесиндиде)
Жообу: $x_{min} = 0,\ f(0)_{min} = -2$ *болот.*

80. Чыгаруу: Чийме 41-сүрөттө көрсөтүлгөн.
Чийме боюнча белгилөөлөрдү жүргүзөбүз.
$OD = r$*-шардын радиусу,*
AED *– тең жактуу. үч бурчтук,-призманын негизи,*
$AD = DE = EA = x$ *– тең жактуу үч бурчтуктун жактары*
DF *–медиана, бийиктик, тең жактуу үч бурчтуктун*

OO_1 – шардын борборунан призманын негизинин медианалары кесилишкен чекитке чейинки аралык,

$OO_1 = KD$ – призманын бийиктигинин жарымы,

$H = 2KD$ – призманын бийиктиги,

Биз жогоруда белгилегендерди r жана x аркылуу туюнтабыз, ошондо аргументи x болгон функияга ээ болобуз.

Призманын көлөмү $V = S_n \cdot H$ формуласы боюнча табылат.

$$S_n = \frac{AE \cdot DF}{2}; \quad DF^2 = AD^2 - AF^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3 \cdot x^2}{4};$$

Демек, $DF = \sqrt{\frac{3 \cdot x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2};$

$$S_n = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \; -$$

Призманын негизинин аянты

Эми призманын бийиктигин табабыз.

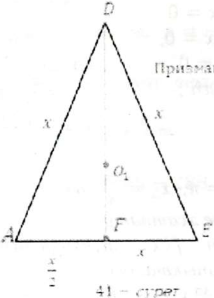
(41-сүрөттү карагыла)

DF кесиндиси медиана болгондуктан

$O_1D = \frac{2}{3} FD$ б.а.

$O_1D = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{x}{\sqrt{3}}$ *болот.*

OO_1D үч бурчтуктан OO_1 ди табабыз.



Призманын негизи

41 – сүрөт

$$OO_1{}^2 = r^2 - O_1D^2 = r^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = r^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{3r^2 - x^2}{3};$$

$$KD = OO_1 = \sqrt{\frac{3r^2 - x^2}{3}},$$

$H = 2KD = 2\sqrt{\frac{3r^2 - x^2}{3}}$, *призманын бийиктиги.*

Призманын көлөмү $V = s_n \cdot H = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \cdot 2\sqrt{\frac{3r^2 - x^2}{\sqrt{3}}} = \frac{x^2\sqrt{3r^2 - x^2}}{2},$

$V(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3r^2 - x^2}}{2}$ *бул функциянын x тин кайсы маанисинде эң чоң маани ала тургандыгын табабыз.*

$$V'(x) = \left(\frac{x^2 \cdot \sqrt{3r^2 - x^2}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((x^2)' \cdot \sqrt{3r^2 - x^2} + x^2 \cdot \left(\sqrt{3r^2 - x^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x\sqrt{3r^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{3r^2 - x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x(3r^2 - x^2) - x^3}{\sqrt{3r^2 - x^2}}\right) =$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{6r^2 x - 3x^3}{\sqrt{3r^2 - x^2}}\right)$; $\frac{6r^2 x - 3x^3}{2\sqrt{3r^2 - x^2}} = 0$ *теңдемесин чыгарабыз*

$6r^2 x - 3x^3 = 0, \; 3x(2r^2 - x^2) = 0$

$x = 0$

$2r^2 - x^2 = 0$

$x^2 = 2r^2$ *x тин маанисин*

$x = \sqrt{2r^2}$ *коюп, бийиктик*

$x = \sqrt{2}r$ *H ты табабыз.*

$$H = 2\sqrt{\frac{3r^2 - x^2}{3}} = 2\sqrt{\frac{3r^2 - x^2}{3}} = 2\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}};$$

Жообу: Призманын бийиктиги $H = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ *болгондо, ал эң чоң көлөмгө ээ болот.*

81. Эки сандын айырмасы 8 ге барабар. Ал сандардын биринчисинин кубунун экинчисине болгон көбөйтүндүсү эң кичине болсун үчүн, бул сандар кандай болууга тийиш?

Чыгаруу: Ал сандардын бири x саны болсун, анда экинчиси $x - 8$ *саны болот. Маселенин шарты боюнча* $f(x) = x^3 \cdot (x - 8)$ *функциясын алууга болот. Бул функциянын x тин кандай маанисинде эң кичине мааниге ээ боло тургандыгын табабыз.*

$$f'(x) = \left(x^3 \cdot (x - 8)\right)' = (x^4 - 8x^3)' = 4x^3 - 24x^3,$$

сыналуучу чекиттерин табабыз.

$4x^3 - 24x^3 = 0,$	*Эми* $f''(x)$ *ти табабыз*
$4x^3(x - 6) = 0,$	$f'' = (4x^2 - 24x^2) = 12x^2 - 48x, f''(0) = 0$
$x_1 = 0,$	$f''(6) = 12 \cdot 36 - 48 \cdot 6 = 432 - 268 =$
$x_2 = 6;$	$= 144 > 0$
	Демек $x = 6$ *болгондо функция эң кичине манини алат.*

Жообу: 6 жана –2 сандары.

82. *Чети ачык, көлөмү 10см^3 болгон цилиндр формуласындагы идиш жасоо керек. Ал идишти жасоого кеткен материал эң аз болсун үчүн идиштин өлчөмдөрү кандай болууга тийиш?*

Чыгаруу: Цлиндирдин көлөмү $V = \pi r^2 H$ формуласы менен эсептелет.

Цлиндирдин көлөмү $V = 10\text{см}^3$ болгондуктан

$\pi r^2 H = 10$ | *теңдемесин түзүүгө болот.*

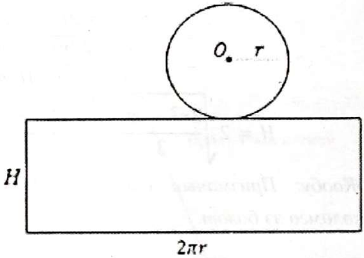
$H = \frac{10}{\pi r^2}$ | *H ты, цилиндирдин бийиктигин, негиздин радиусу r аркылуу туюнтуп алдык.*

Идишти жасоого сарпталуучу материал – цилиндирдин негизи болгон тегеректин, анын каптал бети болгон тик бурчтуктун аянты болот.

Тегеректин аянты $S_T = \pi r^2$

Каптал беттин аянты $S_{\text{к.б.}} = 2\pi r \cdot H$

Демек, сарпталуучу материалдын аянты:



42 – сүрөт

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot H = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{10}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{20}{r};$$

$S(r) = \pi r^2 + \frac{20}{r}$ *r ге карата функция болуп калды.*

Бул функциянын туундусун табабыз.

$$S'(r) = \left(\pi r^2 + \frac{20}{r}\right)' = 2\pi r - \frac{20}{r^2} = \frac{2\pi r^2 - 20}{r^2}$$

Сыналуучу чекиттерин табабыз.

$$\frac{2\pi r^3 - 20}{r^2} = 0$$

$$2\pi r^3 = 20$$

$$r^3 = \frac{20}{2\pi}$$

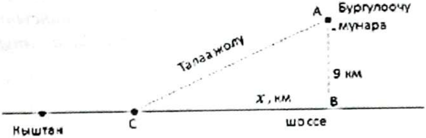
$$r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}};$$

Эми бийиктикти табабыз

$$H = \frac{10}{\pi r^2} = \frac{10}{\pi \cdot (\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}})^2} = \frac{10\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi \cdot \sqrt[3]{10^2}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{\pi}};$$

Жообу: Бийиктик $H = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$, радиус $r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ болгондо идишти жасоого аз материал сарпталат.

83. Чыгаруу: Чийме чийип алалы Велосипедист талаа жолунан шоссеге С чекитинен чыксын. BC = x км болсун дейли.



Анда талаа жолу $S_{\text{т.ж}} = \sqrt{81 + x^2}$ *болот.* (Пифагордун теоремасы боюнча табылды) . *Шоссе боюнча өтүлгөн жол* $S_{\text{ш}} = 15 - x$ *км болот.*

Талаа жолун өтүүгө сарпталган убакыт.

$\frac{\sqrt{81+x^2}}{8}$*саат,*

Шоссени басып өтүүгө сарпталган убакыт.

$\frac{15-x}{10}$ *саат.*

Бардык жолду өтүүгө сарпталган убакыт.

$$f(x) = \frac{15-x}{10} + \frac{\sqrt{81+x^2}}{8}$$ *функциясына ээ болобуз.*

x тин кандай маанисинде бул функция эң кичине маани ала тургандыгын изилдейбиз.

$$f'(x) = \left(\frac{15-x}{10} + \frac{\sqrt{81+x^2}}{8}\right)' = -\frac{1}{10} + \frac{x}{8\sqrt{81+x^2}} = \frac{10x-8\sqrt{81+x^2}}{80\sqrt{81+x^2}},$$

Сыналуучу чекиттерди табабыз. $f'(x) = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$$\frac{10x-8\sqrt{81+x^2}}{80\sqrt{81+x^2}} = 0$$

$$10x - 8\sqrt{81 + x^2} = 10x$$

$$\sqrt{81 + x^2} = \frac{5x}{4}$$

$$\left(\sqrt{81 + x^2}\right)^2 = \left(\frac{5x}{4}\right)^2$$

$$81 + x^2 = \frac{25x^2}{16}$$

$$81 \cdot 16 + 16x^2 = 25x^2$$

$$9x^2 = 81 \cdot 16$$

$$x^2 = 144, \ x = 12$$

$x = 12$ *чекити [0;15] аралыгыны* (0; 12) *жана* (12; 15]*интервалдарына бөлөт. Функциянын туундусу* $x =$ 12 *чекити аркылуу өткөндө белгисин минустан плюска өзгөртөт. Демек* $x = 12$ *минимум чекит болот.*

Жообу: Талаа жолу шоссе менен 12 километрде кесилиш керек. Айылдан 3 км аралыкта.

84. Чыгаруу: Изделүүчү сан x саны болсун дейли, анда маселенин шарты боюнча $x + x^2$ туюнтмасын түзүүгө болот.
Маселени чыгаруу үчүн $f(x) = x + x^2$ функциясынын x тин кандай маанисинде эң кичине маани ала тургандыгын изилдейбиз.

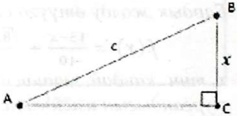
$$f'(x) = (x + x^2)^1 = 1 + 2x,$$
$$1 + 2x = 0,\ 2x = -1,\ x = -\tfrac{1}{2}.$$

сыналуучу чекиттерди табабыз.
Бул сыналуучу чекитте функциянын маанисин эсептейбиз.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4};\ \ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4};$$
$$\min$$

Жообу: Изделген сан $-\frac{1}{2}$.

85. Чыгаруу: Берилген гипотинузалуу ABC тик бурчтуу үч бурчтугун алалы.
Мында $AB = C$ – гипотенуза.
Эгер $BC = x$ деп алсак, анда AC катети төмөнкүгө барабар болот.



43 – сүрөт

$$AC^2 = AB^2 - BC^2,$$
$$AC^2 = C^2 - x^2,$$

$AC = \sqrt{c^2 - x^2}$, *ΔABC нын аянты* $S = \frac{x\cdot\sqrt{c^2-x^2}}{2}$, *болот.*

Маселе $S(x) = S = \frac{x\cdot\sqrt{c^2-x^2}}{2}$ *функциянын x тин кандай маанисинде эң чоң маани ала тургандыгын табууга келет.*

Анда, $S(x)$ функциянын сыналуучу чекиттерин табабыз.

$$S'(x) = \left(\frac{x\cdot\sqrt{c^2-x^2}}{2}\right)' = \frac{x'\cdot\sqrt{c^2-x^2} + x\cdot\left(\sqrt{c^2-x^2}\right)'}{2} = \frac{\sqrt{c^2-x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{c^2-x^2}}}{2} =$$
$$\frac{\sqrt{c^2-x^2} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}}{2} = \frac{c^2-x^2-x^2}{2\sqrt{c^2-x^2}} = \frac{c^2-2x^2}{2\sqrt{c^2-x^2}};$$

$$c^2 - 2x^2 = 0, \quad 2x^2 = c^2,\ x^2\frac{c^2}{2},\ \ x = \frac{c}{\sqrt{2}};$$

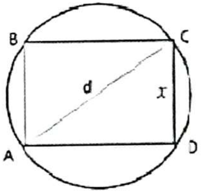
Демек $S(x)$ функциясы $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$ болгондо эң чоң маани алат.
Эми экинчи катетти табабыз.

$$AC=\sqrt{c^2-x^2}=\sqrt{c^2-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}=\sqrt{c^2-\frac{c^2}{2}}=\sqrt{\frac{c^2}{2}}=\frac{c}{\sqrt{2}};$$

Демек $AC=BC=\frac{c}{\sqrt{2}};$

Жообу: Тик бурчтуу үч бурчтук тең капталдуу болгондо эң чоң аянтка ээ болот.

86. Чыгаруу: $ABCD$ *тик бурчтугу айланага ичтен сызылган болсун. Анда* AC *диоганалы айлананын диометрине барабар болот, б.а.* $AC=d$. AC *доиганалы тик бурчтукту барабар эки тик бурчтуу үч бурчтукка болот.*



$AC=d$ *ал үч бурчтуктардын жалпы гипотинузасы болот.*
ADC *тик бурчтуу үч бурчтугунун* CD *катетин* x *деп алалы, анда экинчи катет* $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{d^2-x^2}$ *болот.*
Демек, тик бурчтуктун бир жагы x, *экинчи жагы* $\sqrt{d^2-x^2}$ *болот.*
Тик бурчтуктун аянты $S=x\cdot\sqrt{d^2-x^2}$ *болот.*
$S(x)=x\cdot\sqrt{d^2-x^2}$ *функциянын* x *тин кандай маанисинде эң чоң маани ала тургандыгын табабыз.*
$S(x)$ *функциясынын саналуучу чекиттерин изилдейбиз.*

$$S'(x)=\left(x\cdot\sqrt{d^2-x^2}\right)'=x'\cdot\sqrt{d^2-x^2}+x\cdot\left(\sqrt{d^2-x^2}\right)'=$$
$$\sqrt{d^2-x^2}+\frac{x\cdot(-2x)}{2\sqrt{d^2-x^2}}=\sqrt{d^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}=\frac{d^2-x^2-x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}=\frac{d^2-2x^2}{\sqrt{d^2-x^2}};$$
$$\frac{d^2-2x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}=0,\qquad d^2-2x^2=0,\ 2x^2=d^2,\ x^2\frac{d^2}{2},\ x=\frac{d}{\sqrt{2}};$$

Демек $S(x)$ *Функциясы* $x=\frac{d}{\sqrt{2}}$ *болгондо эң чоң маани алат.*
Тик бурчтуктун экинчи жагын табабыз.

$$AC=\sqrt{d^2-x^2}=\sqrt{d^2-(d^2-(\frac{d}{\sqrt{2}})^2}=\sqrt{\frac{d^2}{2}}=\frac{d}{\sqrt{2}};$$

Жообу: Жактары $\frac{d}{\sqrt{2}}$ *болгон квадрат болгондо, эң чоң аянтка ээ болот.*

87. Чыгаруу: бурулуу бурчу $\varphi(t)$ нин биринчи туундусу бурчтук ылдамдыкты берет.

$\varphi(t) = 3t^2 - 4 + 2,$

$\vartheta(t) = \varphi'(t) = (3t^2 - 4 + 2)' = 6t - 4,$

Демек $\vartheta(t) = 6t - 4$ *рад/сек.*

Эми $t = 4$ *сек болгондогу бурчтук ылдамдыкты табабыз.*

$\vartheta(4) = 6 \cdot 4 - 4 = 24 - 4 = 20$ *рад/сек.*

Жообу: $\vartheta(4) = 20$рад/сек.

88. Чыгаруу: $S(t) = 18t + 9t^2 - t^3$ *бул кыймыл законун биринчи туундусу ылдамдыкты аныктайт.*

$S'^{(t)} = (18t + 9t^2 - t^3)' = 18 + 18t - 3t^2,$

$V(t) = 18 + 18t - 3t^2$

$S(t)$ *тин 2 – туундусу кыймылдын ылдамдануусун аныктайт.*

$W'^{(t)} = S''(t) = (18 + 18t - 3t^2)' = 18 - 6t$

Демек, ылдамдануу $W(t) = 18 - 6t$м/сек^2 *болот.*

Ылдамдануу нөлгө барабар болгон убакыттын моментинде нерсе эң чоң ылдамдыкка ээ болот.

Анда $18 - 6t = 0$ *теңдемесин чыгарабыз.*

$-6t = -18$

$t = -18 : (-6)$

$t = 3$ *сек*

Эми ылдамдык ты табабыз.

$V(3) = 18 + 18 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2 = 18 + 54 - 27 = 45$ *м/ сек*

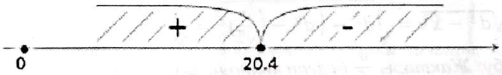
Жообу: $t = 3$ *сек,* $V = 45$ *м сек.*

89. Чыгаруу: Жогору карай вертикалдуу багыттагы кыймыл $S(t) = 200t - \frac{gt^2}{2}$ *закону боюнча кыймылдайт.*

$S'^{(t)} = \left(200t - \frac{gt^2}{2}\right)' = 200 - gt$, *эми сыналуучу чекиттерди таап,* $S(t)$ *функциясынын экстремумдарын изилдейбиз.*

$200t - 9{,}8t = 0,\ t = 200 : 9{,}8,\ t = 20{,}4$ *бул чекит* $(0; +\infty)$ *аралыгын төмөнкүдөй интервалдарга бөлөт.*

$(0; 20{,}4)$ *жана* $(20{,}4; +\infty)$*;*



$S'(20) = 200 = 9{,}8 \cdot 20 = 4 > 0$; $S'(21) = 200 = 9{,}8 \cdot 21 = -5{,}8 < 0$ *демек туундунун белгиси* $t = 20{,}4$ *чекити аркылуу өткөндө оңдон терске өзгөртүп жатат.* $t = 20{,}4$ *максимум чекит болот, снаряд убакыттын бул моментинде эң чоң бийиктикке ээ болот.*

Жообу: $t = 15$ *сек, убакытта снаряд жогору көтөрүлөт.*

$t = 25$ *сек, убакытта снаряд төмөн түшөт.*

90. Чыгаруу: $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.

Аныкталуу областын табабыз. $\sqrt{2 - x^2}$ *туюнтмасы* $2 - x^2 \geq 0$ *болгондо гана мааниге ээ болот.*

$(\sqrt{2} - x)(x + \sqrt{2}) \geq 0$. *бул барабарсыздыктын чыгарылышы көптүгү* $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ *башкача айтканда* $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$ *кесиндиси болот.*

Демек, $D(f) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$;

2. Жуп же тактыгын аныктайбыз.

$f(-x) = -x\sqrt{2 - x^2}$, $f(-x) = -f(x)$ *демек, функция так.*

3. Мезгилдүүлүгүн аныктайбыз.

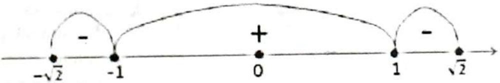
$f(x + t) = (x + t)\sqrt{2 - (x + t)^2}$.

$f(x + t) \neq f(x)$ *демек, функция мезгилдүү эмес.*

4–5.Туундунун жардамы менен экстремумдарын аныктайбыз.

$f'(x) = (x)\sqrt{2 - x^2})' = x' \cdot \sqrt{2 - x^2} + x \cdot (\sqrt{2 - x^2 + t})' = \sqrt{2 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-x^2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}$; *Сыналуучу чекиттерди табабыз.* $\frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}} = 0$, $2 - 2x^2 = 0$, $x^2 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ *бул сыналуучу чекиттер* $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$ *кесиндисин төмөндөгүдөй кесиндилерге бөлөт.*

$[-\sqrt{2};\ -1]$, $[-1; 1]$, $[1; \sqrt{2}]$



$[-\sqrt{2};\ -1]$ *кесиндисинде* $f'(x) < 0$, *демек бул кесиндисинде кемийт;*

$[-1; 1]$ *кесиндисинде* $f'(x) > 0$, *демек бул кесинде функция өсөт;*

$[1;\sqrt{2}]$ *кесиндисинде* $f'(x) < 0$, *демек бул кесиндиде функция кемийт.*

$x = -1$ *чекити аркылуу өткөндө* $f'(x)$ *тин белгиси минустан плюска алмашат, ошондуктан* $x = -1$ *чекитинде функция минимумга ээ болот.*

$$f_{min}(1) = -1 \cdot \sqrt{2-1^2} = -1 \cdot \sqrt{1} = 1.$$

$$f(1) = 1 \cdot \sqrt{2-1^2} = 1 \cdot \sqrt{1} = 1.$$

$x = 1$ *чекити аркылуу өткөндө* $f'(x)$ тин *белгиси плюстан минуска өзгөрөт, демек* $x = 1$ *чекитинде функция максимумга ээ болот.*

6. *Кесиндисиндинин учтарында функциясынын маанилерин эсептейбиз.*

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sqrt{2-(-\sqrt{2})^2} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{0} = 0$$

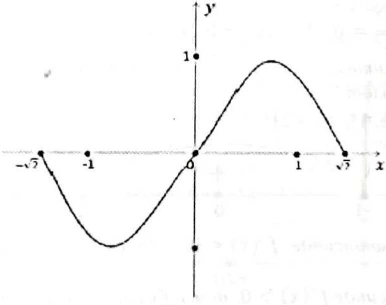
$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{2-(-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{0} = 0.$$

7. *Функциянын графигин координата октору менен кесилишкен чекиттерди табабыз.*

$f(0) = 0 \cdot \sqrt{2-0^2} = 0$, *демек Oy огу менен график* $(0;0)$ *чекитинде келишет.*

$x\sqrt{2-x^2} = 0$,

$$x = 0;\ \ 2 - x^2 = 0, \quad x^2 = 2, \quad x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2}.$$



44 – сүрөт

демек функциянын графиги Ох огу менен чекиттеринде кесилишет.

Функциянын графигин чийебиз. (44-сүрөт)

б) Чыгаруу:

1) аныкталуу областын табабыз. х тин бардык маанилеринде болгондуктан, болот.

2) Функциянын жуп же так экендигин аныктайбыз.

барабардыгы аткарылды, демек f функциясы так функция.

Функциянын мезгилдүүлүгүн аныктайбыз.

барабардыгы орун албайт, демек функция мезгилдүү эмес.

Функциянын монотондуулук интервалдарын жана экстремумдарын изилдейбиз. Ал үчүн функциянын туундусун таап, сыналуучу чекиттерди табабыз.

Бул сыналуучу чекиттер аралыгын төмөндөгүдөй интервалдарга бөлөт.

$-$ $+$ $-$

1 0 1

интервалында демек бул интервалда функция кемүүчү болот.

кесиндисинде демек бул кесиндиде функкия өсүүчү болот.

интервалында демек бул интервалда функция кемүүчү.

чекити аркылуу өткөндө тин белгиси минустан плюска алмашат, ошондуктан бул чекитте функция минимумга ээ болот.

$$f_{min}(-1) = \frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$x = 1$ чекити аркылуу өткөндө $f'(x)$ тин белгиси плюстан минуска алмашат, ошондуктан $x = 1$ чекитинде ункция максимумга ээ болот.

$$f_{max}(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

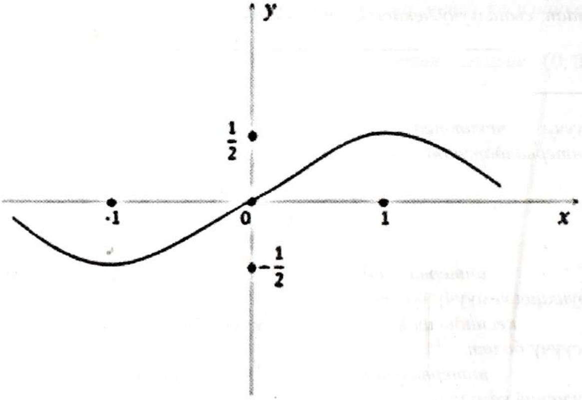
6. Аныкталуу областы чектелбегендиктен 6-пункт каралбайт.

7. функциясынын графигинин координата октору менен кесилишкен чекиттерин табабыз.

$f(0) = \frac{0}{1+0^2} = 0$, *демек график Оу огу менен* $(0;0)$ *чекитинде кесилишет.*

$\frac{x}{1+x^2} = 0$, $x = 0$, *демек график Ох огу менен да* $(0;0)$ *чекитинде кесилишет.*

Жогорудагы аныкталгандар боюнча функциянын графигин чийебиз.



45 – сүрөт

Маалымат үчүн формулалар.

Тригонометриялык негизги теңдештиктер жана формулалар.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha;$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\alpha;$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};$

$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Эки эселенген аргументтин формулалары.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};$

$ctg2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha};$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$

Жарым аргументтин формулалары.

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$

$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}};$

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$

$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha};$

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$

$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha};$

$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};$

$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$

Кошуунун тригонометриялык формулалары.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta;$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta;$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta;$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta;$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta};$

$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}.$

Тригонометриялык функциялардын суммасын жана айырмасын көбөйтүндүгө өзгөртүп түзүү формулалары.

$$sin \propto + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$sin \propto - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$cos \propto + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$cos \propto - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$tg \propto + tg\beta = \frac{sin(\propto+\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta};$$

$$tg \propto - tg\beta = \frac{sin(\propto-\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta};$$

$$ctg \propto + ctg\beta = \frac{sin(\propto+\beta)}{sin\alpha \cdot sin\beta};$$

$$ctg \propto - ctg\beta = \frac{sin(\propto-\beta)}{sin\alpha \cdot sin\beta}.$$

Пределдердин негизги касиеттери.

$$\lim_{x\to a} C = C; \qquad \lim_{x\to a}\big(C \cdot f(x)\big) = C \cdot \lim_{x\to a} f(x);$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}.$$

Дифференцирлөөнүн эрежелери жана формулалары.

Функция	*Туундуну табуу эрежеси.*	*Татаал функциялардын туундулары.*	
$y = c$	$y' = 0$	$y = \frac{a}{u}$	$y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u'$
$y = x$	$y' = 1$	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1} \cdot u'$
$y = cu$	$y' = cu'$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$y = u \pm \varphi$	$y' = u' \pm \varphi'$	$y = sinu$	$y' = cosu \cdot u'$
$y = u \cdot \varphi$	$y' = u'\varphi + u\varphi'$	$y = cosu$	$y' = -sinu \cdot u'$
$y = \frac{u}{\varphi}$	$y' = \frac{u'\varphi - u\varphi'}{\varphi^2}$	$y = tgu$	$y' = \frac{1}{cos^2u} \cdot u'$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = ctgu$	$y' = -\frac{1}{sin^2u} - u'$
$y = sin\,x$	$y' = (sinx)' = cosx$	$y = arcsinu$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$y = cos\,x$	$y' = (cosx)' = -sinx$	$y = arccosu$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$y = tg\,x$	$y' = (tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$	$y = arctgu$	$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$y = ctg\,x$	$y' = (ctgx)^1 = \frac{1}{sin^2x}$	$y = arcctgu$	$y' = -\frac{1}{1+u^2}u'$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – *жаныманын теңдемеси.*

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ – *Лагранждын формуласы.*

Пайдаланылган адабияттар.

1. Ж. Саламатов, М. Жураев, Т.Аманкулов. Алгебра жана анализдин башталышы. 10 – класс. Б.: "Aditi", 2009;

2.А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын. Алгебра жана анализдин башталышы. 10-11-класс Бишкек, «Мектеп» 2003;

3. Ж.Саламатов. Математикалык анализ мисалдарда жана маселелерде. I бөлүк. Фрунзе, «Мектеп» 1972;

4. И.А.Каплан. Практические занятия по всшей математике. Харков, 1973;

5. В.Г.Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И.Шабунин. Лекции и задачи по элементарной математике. Москва «Наука», 1972.

Мазмуну

Султанбаев М.

Алгебра
жана анализдин башталышы боюнча маалымдама

10-класс

Башкы редактору *Ж. К. Кубаков*
Редактору *М. Шоруков*
Мукаба дизайнери *Х. Газибаев*
Корректору *М. Мамадиев*
Тех.редактору *Б. Эргешов*

2017-жылдын 29-июнунда басууга кол коюлду.
Нускасы 500 даана.

ЖЧК «Гүлчынар» басмаканасы
Бишкек ш., Т. Фрунзе көчөсү 91/1